BINOMIO DE NEWTON

Proposición

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

DEMOSTRACIÓN:

La hacemos por inducción sobre n.

▹ $P(1)$ es verdadera

$P(1)$: $(a+b)^1 = a + b = b + a = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$.

Luego, es verdadera.

▹ Para todo $n \in \mathbb{N}$: $P(n)$ verdadera $\Longrightarrow P(n+1)$ verdadera

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \,.\, (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) .\, (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN DEL NÚMERO e

Proposición

La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *es estrictamente creciente*

DEMOSTRACIÓN:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{n+1} + 1\right)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k 1^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \frac{1}{(n+1)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)n \dots (n+1-(k-1))}{k!(n+1)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1-0)(n+1-1) \dots (n+1-(k-1))}{k!(n+1)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n+1-1}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+1-(k-1)}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}.1.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \dots .\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.1.\left(1 - \frac{1}{n}\right). \dots .\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.1.\left(1 - \frac{1}{n}\right). \dots .\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-0).(n-1). \dots .(n-(k-1))}{k!\, n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

Proposición

La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ está acotada superiormente

DEMOSTRACIÓN:

Recién vimos, en uno de los pasos, que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \;\ldots\; .\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

Y como cada uno de los términos entre paréntesis son positivos y menores que 1, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \;\ldots\; .\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + 9\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{3^k}\\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + 9\frac{1}{3^4}\sum_{k=0}^{n-4} \frac{1}{3^k}\\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{9}\frac{1 - (1/3)^{n-3}}{1 - 1/3}\\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{9}\frac{3}{2}(1 - (1/3)^{n-3})\\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

NOTA: en la segunda desigualdad usamos que para $k \geq 3$ es $k! > 3^{k-2}$.

Proposición *(Definición de e)*

Existe el límite de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

DEMOSTRACIÓN:

Como (a_n) es creciente y acotada superiormente podemos asegurar que existe

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Big/ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Definimos entonces:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Además obtuvimos que $e \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 3$. También —mediante un cálculo similar— se puede ver que $e > 2$.