

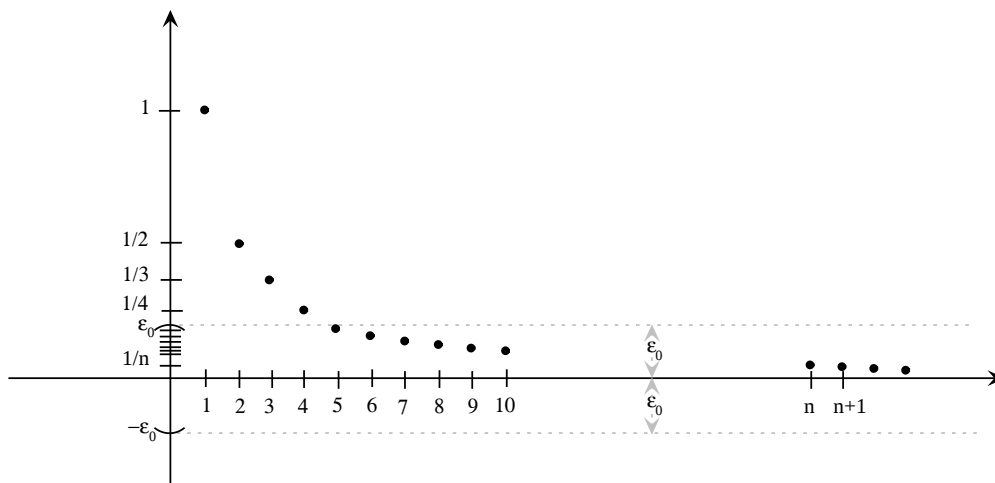
ALGUNOS LÍMITES DE SUCESIONES

1. Demostrar usando sólo la definición que $\lim \frac{1}{n} = 0$

Para cada $\varepsilon_0 > 0$ debemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ —que dependa únicamente del ε dado— de modo tal que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon_0$$

Veamos cómo se puede analizar gráficamente la situación (tomamos distintas escalas en cada eje para permitir la visualización)



Para el ε_0 del dibujo resulta que todos los $a_n = \frac{1}{n}$ —a partir de $n = 5$ — caen en el intervalo $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Hemos *resuelto gráficamente* el problema para este valor especial de $\varepsilon = \varepsilon_0$ ya que en este caso particular es cierto que

$$n \geq 5 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon_0$$

Luego, $n_0 = 5$ para este ε_0 .

Para resolverlo analíticamente —y para todo valor de $\varepsilon > 0$ — podemos hacer lo siguiente. Estamos tratando de determinar a partir de qué valor de n vale

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

siendo ambos números positivos, esto equivale a

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

pero la propiedad arquimediana nos asegura que es posible encontrar un natural n_0 más grande que el número real $\frac{1}{\varepsilon}$. Y entonces, como

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

para todo $n \geq n_0$, tenemos que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Para tener una idea más *concreta* de la relación que hay entre ε y n_0 podríamos tomar

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

que ciertamente es un número natural y mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$.

2. Demostrar usando sólo la definición que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n^2 + 5} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un valor de n — n_0 — a partir del cual

$$\left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ahora no es tan fácil, como lo fue en el caso anterior, descubrir cuál es la relación entre ε y el n_0 que buscamos. Para solucionar este inconveniente vamos a tratar de encontrar una sucesión b_n que sea *un poquito más grande y más simple* que $\frac{3n}{2n^2 + 5}$ —pero que siga tendiendo a 0— para la cual sea fácil encontrar la relación entre ε y n_0 . Concretamente, buscamos b_n de modo que

$$\left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| = \left| \frac{3n}{2n^2 + 5} \right| = \frac{3n}{2n^2 + 5} \leq b_n$$

con $b_n \rightarrow 0$ y cuya expresión sea lo más simple posible.

Observemos que, por ser $2n^2 + 5 > 2n^2 > 0$, resulta

$$\frac{1}{2n^2 + 5} < \frac{1}{2n^2}$$

y siendo también $3n > 0$

$$\frac{3n}{2n^2 + 5} < \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2n}$$

luego, ya encontramos $b_n = \frac{3}{2n}$, pues esta sucesión cumple

$$\frac{3n}{2n^2 + 5} < \frac{3}{2n} = b_n$$

$b_n \rightarrow 0$ y además es muy simple. Entonces, si encontramos un n_0 de modo tal que

$$b_n < \varepsilon$$

para $n \geq n_0$, en particular se cumplirá que

$$\left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| = \frac{3n}{2n^2 + 5} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{3n}{2n^2 + 5} < b_n}}{<} \varepsilon$$

que es precisamente lo que estamos intentando demostrar.

Veamos entonces cómo se deben relacionar ε y n_0 . Necesitamos que sea

$$b_n = \frac{3}{2n} = \frac{3}{2}n < \varepsilon$$

es decir,

$$\frac{3}{2} < n\varepsilon$$

de donde obtenemos finalmente

$$n > \frac{3}{2\varepsilon} = \frac{3}{2\varepsilon}$$

Esto nos asegura que si tomamos

$$n_0 = \left\lceil \frac{3}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$$

será $n_0 > \frac{3}{2\varepsilon}$ y en tal caso podremos afirmar que

$$n \geq n_0 \quad \implies \quad \frac{3}{2n} < \varepsilon$$

y por lo tanto también que

$$n \geq n_0 \quad \implies \quad \left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| < \varepsilon$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Comentario: desde luego que no se pretende que hagan una exposición tan detallada al demostrar un límite por definición. Alcanza con lo siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$, buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| < \varepsilon$$

para $n \geq n_0$.

$$\left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| = \frac{3n}{2n^2 + 5} < \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{para que sea}}}{<} \varepsilon$$

basta pedir

$$n > \frac{3}{2\varepsilon}$$

luego, si tomamos

$$n_0 = \left\lceil \frac{3}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$$

tendremos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{3n}{2n^2 + 5} - 0 \right| = \frac{3n}{2n^2 + 5} < \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{2n_0} < \varepsilon$$