ALGUNOS LÍMITES DE FUNCIONES

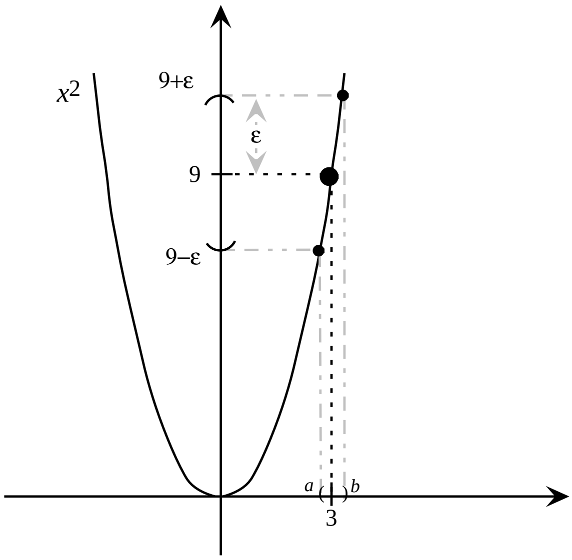
1. *Demostrar usando sólo la definición que* $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$

Para cada $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ –que únicamente dependa del ε dado– de modo que

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Se trata de determinar a qué distancia debe estar x de 3 para poder asegurar que x^2 va a estar a una distancia menor que el ε dado del número 9.

Gráficamente, esto lo podríamos resolver así



Es claro que todos los x que están entre a y b –al elevarlos al cuadrado– van a estar entre $9-\varepsilon$ y $9+\varepsilon$. Entonces, si tomamos un δ más chico que $3-a$ y también más chico que $b-3$ resultará que $(3-\delta, 3+\delta) \subset (a,b)$. En consecuencia, todos los $x \in (3-\delta, 3+\delta)$ satisfarán $x^2 \in (9-\varepsilon, 9+\varepsilon)$. Esto lo podemos expresar así

$$|x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

De esta forma hemos hallado –al menos gráficamente– la relación que debe haber entre ε y δ. Pero no siempre la función es tan simple como en este caso y probablemente sea muy complicado graficarla.

Una forma de lograr esto *analíticamente* es reescribir la expresión $|x^2-9|$ como un producto donde uno de los factores sea $|x-3|$, que es precisamente lo que necesitamos saber cuán chico debe ser para lograr que $|x^2-9|$ sea menor que ε.

Si factorizamos $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ logramos nuestro objetivo: $|x^2 - 9| = |x-3||x+3|$.

Ahora bien, como el δ que buscamos no puede depender más que de ε, nuestro próximo paso será encontrar un número —independiente de x— que pueda *reemplazar* a $|x+3|$.

Para lograr esto recordemos que nuestro propósito es ver que $|x^2 - 9|$ es menor que ε, entonces si consiguiéramos una expresión ***un poco más grande*** que $|x^2 - 9|$ a la que pudiéramos hacer menor que ε nuestro objetivo estaría logrado. Lo que se necesita entonces es encontrar un número, llamémoslo M, tal que

$$|x+3| < M$$

Si no le imponemos ninguna restricción a x, esto no va a ser posible ya que $|x+3|$ puede tomar valores arbitrariamente grandes. Para resolver este inconveniente pensamos lo siguiente: como nos interesa estar ***cerca*** de 3, una *restricción razonable* sobre x sería

$$2 < x < 4$$

que es lo mismo que decir:

$$|x-3| < 1$$

(*cualquier restricción de la forma* $|x-3| < d$ *—con* $d > 0$*— será* ***razonable*** *cuando* $x \to 3$)

Con esta restricción, podemos afirmar que $2+3 < x+3 < 4+3$, es decir

$$5 < x+3 < 7$$

Por lo tanto,

$$|x+3| \underset{\substack{\uparrow \\ x+3>5>0}}{=} x+3 < 7$$

De esta forma, gracias a la restricción impuesta a x: $|x-3| < 1$, logramos el M que buscábamos. [1] Entonces, podemos decir

$$|x^2 - 9| = |x-3||x+3| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |x-3|<1}}{<} 7|x-3|$$

Y a partir de aquí es clara la vinculación entre ε y δ: para que

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

bastaría tomar

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Resumiendo, para poder llegar a que $|x^2 - 9| < \varepsilon$ impusimos las siguientes condiciones:

$$|x-3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Esto nos dice que si tomamos

$$\delta = \text{mínimo entre } 1 \text{ y } \frac{\varepsilon}{7}$$

[1]a este proceso de encontrar M lo solemos llamar *acotar* la expresión $|x+3|$

podremos afirmar que

$$|x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2-9| < \varepsilon$$

y por lo tanto también que

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2-9| < \varepsilon$$

que era justamente lo que pretendíamos en un principio.

Comentario: desde luego que no se pretende que hagan una exposición tan detallada al demostrar un límite por definición. Alcanza con lo siguiente:

$$|x^2-9| = |x-3||x+3|$$

Ahora bien, como $x \to 3$ una restricción admisible puede ser

$$|x-3| < 1$$

En ese caso,

$$2 < x < 4 \qquad \text{con lo cual} \qquad 5 < x+3 < 7$$

En particular, podemos asegurar que $x+3 > 0$ y en consecuencia

$$|x+3| = x+3 < 7$$

Entonces,

$$|x^2-9| = |x-3||x+3| \underset{\text{si } |x-3|<1}{\underset{\uparrow}{<}} 7|x-3|$$

Entonces, si agregamos la condición

$$7|x-3| < \varepsilon$$

es decir,

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

logramos lo que queríamos: $|x^2-9| < \varepsilon$. Esto nos dice que alcanza con tomar

$$\delta = \text{mín}\{1, \tfrac{\varepsilon}{7}\}$$

para garantizar que

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2-9| < \varepsilon$$

2. *Demostrar usando sólo la definición que* $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2+5x-23}{x-1} = -1$

Para cada número $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un número $\delta > 0$ –que sólo dependa de ε– de modo tal que sea válida la siguiente afirmación

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1) \right| < \varepsilon$$

La idea en este caso, siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la situación anterior, será reescribir la expresión

$$\frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1)$$

como un producto donde uno de los factores sea lo que sabemos que —al tender x a 2— se va a poder achicar tanto como uno quiera: $x-2$.

Hagamos eso,

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1) = \frac{3x^2+5x-23}{x-1} + 1 = \frac{3x^2+5x-23+x-1}{x-1} = \frac{3x^2+6x-24}{x-1} \\ = \frac{3(x-2)(x+4)}{x-1} = (x-2)\frac{3(x+4)}{x-1} \end{aligned}$$

Luego,

$$\left| \frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1) \right| = |x-2| \, \frac{3|x+4|}{|x-1|} \tag{1}$$

Conseguido el primer objetivo, que aparezca $|x-2|$ como factor, imitamos el procedimiento usado en el ejercicio anterior y tratamos *acotar* la expresión

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|}$$

Es decir, buscamos un número M —***independiente de*** x— tal que

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|} < M$$

Observemos que si encontráramos un número A tal que

$$|x+4| < A$$

resultaría

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|} < \frac{3A}{|x-1|}$$

y entonces nos alcanzaría con encontrar un M de modo tal que

$$\frac{3A}{|x-1|} < M \tag{2}$$

pues eso nos asegura que

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|} < \frac{3A}{|x-1|} < M$$

que es lo que necesitamos.

Tratemos entonces de encontrar M de modo que valga (2). El tema aquí es que la expresión que depende de x, $|x-1|$, está en el demominador.

Si, como hicimos con $|x+4|$, encontráramos un número, A' tal que $|x-1| < A'$ resultaría

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{A'}$$

y en consecuencia

$$\frac{3A}{|x-1|} > \frac{3A}{A'}$$

y si bien el segundo miembro efectivamente no depende de x, la desigualdad tiene sentido opuesto al que necesitamos. Conclusión este A' ***no*** nos serviría.

Pero esto nos da la idea de que lo que ***sí*** nos va a servir es encontrar un $B > 0$ de modo tal que

$$|x-1| > B$$

pues entonces

$$\frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{B}$$

lo que implica que

$$\frac{3A}{|x-1|} < \frac{3A}{B}$$

y habremos así encontrado el M que buscamos: $M = \frac{3A}{B}$.

Resumiendo, para poder *acotar* la expresión $\dfrac{3|x+4|}{|x-1|}$ necesitamos hallar $A, B > 0$ tales que

$$|x+4| < A \qquad \text{y} \qquad |x-1| > B$$

Tal como observamos en el ejercicio anterior, estas desigualdades no van a ser ciertas si no *restringimos* los valores que puede tomar x.

Eso no es realmente un problema porque, como hicimos antes, dado que $x \to 2$, podemos suponer que satisface una condición del tipo

$$|x-2| < d$$

para algún $d > 0$.

En el ejercicio anterior tomamos $d = 1$. Veamos si ahora también nos sirve esa distancia.

Si $|x-2| < 1$, $1 < x < 3$, luego

$$5 < x+4 < 7 \qquad \text{y} \qquad 0 < x-1 < 2$$

Tenemos entonces resuelto el problema de encontrar A, pues

$$|x+4| \underset{\substack{\uparrow \\ x+4>5>0}}{=} x+4 < 7$$

pero no así con respecto a B pues

$$|x-1| \underset{\underset{x-1>0}{\uparrow}}{=} x-1>0$$

es decir, sólo podemos garantizar que $|x-1|>0$ y necesitamos que sea *mayor que algo* >0.

Esto nos dice que la restricción que tomamos —$|x-2|<1$— no alcanza; debemos *acercarnos más* a 2. Intentemos entonces con

$$|x-2|<\frac{1}{2}$$

que sigue siendo una *restricción razonable* cuando $x\to 2$.

Ahora,

$$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$$

con lo cual,

$$\frac{11}{2}<x+4<\frac{13}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}<x-1<\frac{3}{2}$$

de donde concluimos

$$|x+4| \underset{\underset{x+4>\frac{11}{2}>0}{\uparrow}}{=} x+4<\frac{13}{2} \qquad \text{y} \qquad |x-1| \underset{\underset{x-1>\frac{1}{2}>0}{\uparrow}}{=} x-1>\frac{1}{2}$$

Luego,

$$A=\frac{13}{2} \qquad \text{y} \qquad B=\frac{1}{2}$$

Es decir, si $|x-2|<\frac{1}{2}$

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|}<\frac{3\frac{13}{2}}{\frac{1}{2}}=39$$

en consecuencia, el M que buscábamos es 39.

Ya estamos entonces en condiciones de descubrir cuál es la relación entre ε y δ. Volvemos a (1)

$$\left|\frac{3x^2+5x-23}{x-1}-(-1)\right| = |x-2|\frac{3|x+4|}{|x-1|} \underset{\underset{\text{si } |x-2|<\frac{1}{2}}{\uparrow}}{<} |x-2|\,M = 39|x-2|$$

Queda claro que si imponemos como última condición

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{39}$$

podremos asegurar que

$$\left|\frac{3x^2+5x-23}{x-1}-(-1)\right|<\varepsilon$$

Finalmente, teniendo en cuenta ***todas*** las restricciones, esto es

$$|x-2|<\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad |x-2|<\frac{\varepsilon}{39}$$

podemos afirmar que

$$\delta = \text{mín}\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{\varepsilon}{39}\}$$

garantiza la validez de la implicación

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1)\right| < \varepsilon$$

que es precisamente lo pretendíamos lograr.

Comentario: Tampoco en este caso se pretende un desarrollo tan detallado. Alcanza con lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1) &= \frac{3x^2+5x-23}{x-1} + 1 = \frac{3x^2+5x-23+x-1}{x-1} = \frac{3x^2+6x-24}{x-1} \\ &= \frac{3(x-2)(x+4)}{x-1} = (x-2)\frac{3(x+4)}{x-1}\end{aligned}$$

$$\left|\frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1)\right| = |x-2|\,\frac{3|x+4|}{|x-1|}$$

Tratamos de conseguir un número $M > 0$ tal que

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|} < M$$

Como $x \to 2$, una condición razonable es: $|x-2| < 1$. Entonces,

$$1 < x < 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 5 < x+4 < 7 \qquad \text{y} \qquad 0 < x-1 < 2$$

Esta condición no es suficiente pues necesitamos $|x-1| >$ algo > 0.
Pedimos entonces,

$$|x-2| < \frac{1}{2} \tag{$*$}$$

Ahora: $\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{5}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{11}{2} < x+4 < \dfrac{13}{2} \qquad \text{y} \qquad \dfrac{1}{2} < x-1 < \dfrac{3}{2}$

Entonces,

$$|x+4| = x+4 < \frac{13}{2} \qquad \text{y} \qquad |x-1| = x-1 > \frac{1}{2}$$

por lo tanto,

$$\frac{3|x+4|}{|x-1|} < 3\frac{13/2}{1/2} = \frac{3.13.2}{2} = 39$$

es decir, encontramos $M = 39 > 0$.

$$\left|\frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1)\right| = |x-2|\,\frac{3|x+4|}{|x-1|} \underset{|x-2|<\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{<}} 39|x-2|$$

Pedimos como última restricción $39|x-2| < \varepsilon$, es decir

$$|x-2| < \tfrac{\varepsilon}{39} \qquad (**)$$

Teniendo en cuenta todas las condiciones que impusimos –$(*)$ y $(**)$– vemos que alcanza con tomar

$$\delta = \text{mín}\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{\varepsilon}{39}\}$$

para poder asegurar que vale la implicación

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{3x^2+5x-23}{x-1} - (-1)\right| < \varepsilon$$

Importante

Cuando se resuelve este tipo de ejercicios hay que tener mucho cuidado con las desigualdades.
Un error muy común es olvidar la siguiente propiedad

$$a < b \quad y \quad \mathbf{c < 0} \qquad \Longrightarrow \qquad ac \mathbf{>} bc$$

*Y entonces aparecen conclusiones **erróneas**, como sería el caso de afirmar que*

$$\left.\begin{aligned} 0 < x < y < z \\ a < b < c \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad ax < by < cz$$

sin preocuparse del signo de a , b y c.

Por ejemplo,

$$1 < 3 < 7 \quad y \quad -6 < -4 < -2$$

pero

$$1(-6) < 3(-4) < 7(-2)$$

*es claramente **FALSO**.*

Lo correcto, si se tienen las desigualdades

$$0 < x < y < z \quad y \quad a < b < c \mathbf{< 0}$$

—y uno quiere multiplicarlas miembro a miembro— *es multiplicar por* -1 *la segunda cadena de desigualdades, con lo cual se tiene ahora*

$$0 < x < y < z \quad y \quad \mathbf{0 <} -c < -b < -a$$

*de donde **sí** se concluye –por ser todos los números (de la segunda cadena) positivos– que*

$$x(-c) < y(-b) < z(-a)$$

y finalmente multiplicando por -1 *llegamos a*

$$az < by < cx$$

*Otro error muy común es decir que si dos números satisfacen determinada desigualdad, entonces sus respectivos módulos también. Eso, en general, es **FALSO**. Consideremos, por ejemplo*

$$-3 < -1 \quad \textit{es cierto, pero} \quad |-3| < |-1| \quad \textit{es } \textbf{\textit{FALSO}}$$

La función módulo *es decreciente en* $\mathbb{R}_{<0}$ *y creciente en* $\mathbb{R}_{>0}$*; es decir, **no** es monótona en* $\mathbb{R}$.

3. *Probar que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - \ln x + x^3}{4x^2 - 3^x - \operatorname{sen} x} = 0$

Tenemos

$$\frac{e^x - \ln x + x^3}{4x^2 - 3^x - \operatorname{sen} x} = \frac{e^x(1 - \frac{\ln x}{e^x} + \frac{x^3}{e^x})}{3^x(\frac{4x^2}{3^x} - 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{3^x})} = \underbrace{\left(\frac{e}{3}\right)^x}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\frac{1 - \frac{\ln x}{e^x} + \frac{x^3}{e^x}}{\frac{4x^2}{3^x} - 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{3^x}}}_{\substack{\downarrow \\ -1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0(-1) = 0$$

pues

- ★ $0 < \frac{e}{3} < 1 \implies \left(\dfrac{e}{3}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- ★ $\dfrac{\ln x}{e^x} = \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\dfrac{x}{e^x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- ★ $e > 1 \implies \dfrac{x^3}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- ★ $3 > 1 \implies \dfrac{4x^2}{3^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- ★ $\operatorname{sen} x$ acotada en $\mathbb{R}$ y $\dfrac{1}{3^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \implies \dfrac{\operatorname{sen} x}{3^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

4. *Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$

$$x(e^{1/x} - 1) = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

pues

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$$

Nota

- ▹ *Si no se pide probar un límite por definición, se pueden usar los resultados probados en clase.*
- ▹ *Los límites especiales, tales como*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

por citar dos ejemplos, tampoco necesitan ser probados nuevamente ya que es un tema dado en clase.