

CÁLCULO DE ALGUNOS LÍMITES (de dos variables)

1. Demostrar usando sólo la definición que $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,9)} xy = -9$

Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x + 1| < \delta \quad , \quad 0 < |y - 9| < \delta \quad \implies \quad |xy + 9| < \varepsilon$$

Razonando como en el ejercicio anterior, la idea será reescribir $|xy + 9|$ de modo tal que aparezcan las dos expresiones que podemos achicar cuando $(x, y) \rightarrow (-1, 9)$; es decir,

$$|x + 1| \quad y \quad |y - 9|$$

Una forma de lograrlo es restar —y sumar para que no altere— por ejemplo: ‘ $9x$ ’¹

Entonces,

$$|xy + 9| = |xy - 9x + 9x + 9| = |x(y - 9) + 9(x + 1)| \leq |x||y - 9| + 9|x + 1| \quad (1)$$

En el primer sumando se presenta una situación similar a la que tuvimos con $|x + 3|$ en el ejercicio anterior. Luego, recordando que ahora $x \rightarrow -1$, una restricción *razonable* es:

$$|x + 1| < 1$$

Considerando esta condición podemos asegurar que

$$-1 < x + 1 < 1$$

o, equivalentemente,

$$-2 < x < 0$$

Luego,

$$|x| \underset{\substack{\uparrow \\ x < 0}}{=} -x \underset{\substack{\uparrow \\ -2 < x}}{<} 2$$

Volviendo a (1),

$$|xy + 9| \leq |x||y - 9| + 9|x + 1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |x+1| < 1}}{<} 2|y - 9| + 9|x + 1|$$

¹se puede trabajar de igual forma si sumamos y restamos: $(-1)y$

A partir de aquí queda claro que bastaría que se cumpliera

$$2|y - 9| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad 9|x + 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

es decir,

$$|y - 9| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |x + 1| < \frac{\varepsilon}{18}$$

(dos condiciones razonables dado que $y \rightarrow 9$ y $x \rightarrow -1$)

para asegurar que

$$|xy + 9| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Resumiendo, para poder llegar a $|xy + 9| < \varepsilon$ impusimos las siguientes condiciones

$$|x + 1| < 1 \quad , \quad |y - 9| < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad |x + 1| < \frac{\varepsilon}{18}$$

De modo que si tomamos

$$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{18}\} = \min\{1, \frac{\varepsilon}{18}\}$$

podemos afirmar que

$$0 < |x + 1| < \delta \quad , \quad 0 < |y - 9| < \delta \quad \implies \quad |xy + 9| < \varepsilon$$

como queríamos.

Comentario: nuevamente, no se pretende que hagan una exposición tan detallada al demostrar un límite por definición. Es suficiente poner lo siguiente:

$$|xy + 9| = |xy - 9x + 9x + 9| = |x(y - 9) + 9(x + 1)| \leq |x||y - 9| + 9|x + 1|$$

Como $x \rightarrow -1$ una restricción admisible puede ser

$$|x + 1| < 1$$

En tal caso,

$$-1 < x + 1 < 1 \quad \text{con lo cual} \quad -2 < x < 0$$

y en consecuencia

$$|x| = \begin{matrix} -x < 2 \\ \uparrow & \uparrow \\ x < 0 & -2 < x \end{matrix}$$

Entonces,

$$|xy + 9| \leq |x||y - 9| + 9|x + 1| < \begin{matrix} 2|y - 9| + 9|x + 1| \\ \uparrow \\ \text{si } |x+1| < 1 \end{matrix}$$

Si agregamos las condiciones

$$2|y - 9| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad 9|x + 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

que es lo mismo que decir,

$$|y - 9| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |x + 1| < \frac{\varepsilon}{18}$$

logramos que: $|xy + 9| < \varepsilon$. Esto nos dice que alcanza con tomar

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{18}\right\} = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{18}\right\}$$

para garantizar que

$$\left. \begin{array}{l} 0 < |x + 1| < \delta \\ 0 < |y - 9| < \delta \end{array} \right\} \implies |xy + 9| < \varepsilon$$

Importante

Cuando se resuelve este tipo de ejercicios hay que tener mucho cuidado con las desigualdades.

Un error muy común es olvidar la siguiente propiedad

$$a < b \quad \text{y} \quad c < \mathbf{0} \quad \implies \quad ac > bc$$

Y entonces aparecen conclusiones **erróneas**, como sería el caso de afirmar que

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < y < z \\ a < b < c \end{array} \right\} \implies ax < by < cz$$

sin preocuparse del signo de a , b y c .

Por ejemplo,

$$1 < 3 < 7 \quad \text{y} \quad -6 < -4 < -2$$

pero

$$1(-6) < 3(-4) < 7(-2)$$

es claramente **FALSO**.

Lo correcto, si se tienen las desigualdades

$$0 < x < y < z \quad \text{y} \quad a < b < c < \mathbf{0}$$

—y uno quiere multiplicarlas miembro a miembro— es multiplicar por -1 la segunda cadena de desigualdades, con lo cual se tiene ahora

$$0 < x < y < z \quad \text{y} \quad \mathbf{0} < -c < -b < -a$$

de donde sí se concluye —por ser todos los números (de la segunda cadena) positivos— que

$$x(-c) < y(-b) < z(-a)$$

y finalmente multiplicando por -1 llegamos a

$$az < by < cx$$

Otro error muy común es decir que si dos números satisfacen determinada desigualdad, entonces sus respectivos módulos también. Eso, en general, es **FALSO**. Consideremos, por ejemplo

$$-3 < -1 \quad \text{es cierto, pero} \quad |-3| < |-1| \quad \text{es } \mathbf{FALSO}$$

La función módulo es decreciente en $\mathbb{R}_{<0}$ y creciente en $\mathbb{R}_{>0}$; es decir, **no** es monótona en \mathbb{R} .

2. Probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,5)} (x^2 - y^2 + \frac{1}{x}) = -23$

¿Cómo se llegó a la conclusión? Seguramente se tuvo en cuenta que

$$x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1, \quad y^2 \xrightarrow{y \rightarrow 5} 25, \quad \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 \quad (2)$$

Esto sugiere agrupar de la siguiente manera

$$|x^2 - y^2 + \frac{1}{x} - (-23)| = |x^2 - y^2 + \frac{1}{x} - (1 - 25 + 1)| = |(x^2 - 1) - (y^2 - 25) + (\frac{1}{x} - 1)|$$

$$\leq |x^2 - 1| + |y^2 - 25| + |\frac{1}{x} - 1|$$

↑
cada paréntesis se achica
cuando $(x,y) \rightarrow (1,5)$

$$= \underbrace{|x-1|}_{\downarrow 0} \underbrace{|x+1|}_{\downarrow 2} + \underbrace{|y-5|}_{\downarrow 0} \underbrace{|y+5|}_{\downarrow 10} + \underbrace{|x-1|}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\downarrow 1} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,5)} 0$$

NOTA: también se considera probado si se usan las propiedades del límite de una suma y de un producto y los resultados conocidos (2). Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,5)} (x^2 - y^2 + \frac{1}{x}) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,5)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,5)} y^2 + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,5)} \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{y \rightarrow 5} y^2 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \\ &= 1 - 25 + 1 = -23 \end{aligned}$$

3. Analizar la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Notemos que la función $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ no está definida sobre los ejes (luego, no nos vamos a poder acercar al origen por esas direcciones).

Además sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} = \infty \end{aligned}$$

Pero como tanto x como y pueden ser positivos o negativos cerca del origen, no podemos —con esta única información— decidir qué pasa con la suma.

Aunque sí sería razonable sospechar que podría no existir este límite. Analicemos un poco más detalladamente la situación

◇ si x e y tienen el mismo signo (i.e., (x, y) está en el primer o tercer cuadrante) es claro que

$$|f(x, y)| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \infty$$

◇ pero las cosas no están tan claras si tienen signos distintos. Es más, si tomamos $y = -x$

$$f(x, -x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Parece claro entonces que este límite no existe. Una vez descubierto este hecho, una manera simple de justificar que no existe es la siguiente

Sea $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Consideremos las curvas

$$\alpha(t) = (t, t) \quad \text{y} \quad \beta(t) = (t, -t)$$

Es claro que ambas tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow 0$ y

$$f(\alpha(t)) = f(t, t) = 2\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty \quad , \quad f(\beta(t)) = f(t, -t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Siendo estos límites distintos, podemos asegurar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ no existe.

NOTA: si alguien hubiera preferido usar coordenadas polares (no recomendable en este caso pues no facilita el análisis) un posible tratamiento sería

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad \text{con:} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{y} \quad \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

pues esos ángulos excluidos corresponden a los ejes sobre los que la función no está definida.

Llamemos

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{r \cos \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{r \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{r} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

el hecho que la expresión quede dependiendo del ángulo θ nos *sugiere* que puede no haber límite. Para comprobarlo debemos encontrar dos curvas que se acerquen al origen cuando $r \rightarrow 0$ que produzcan límites distintos al componerlas con g .

Notemos que si tomamos un valor fijo de θ que no anule el numerador (el denominador no se puede anular por las restricciones sobre θ) el cociente se va a ir a ∞ pero si el valor de θ anula el numerador, claramente el cociente es nulo y por lo tanto tiende a cero.

Esto nos sugiere considerar estas curvas (dadas en coordenadas polares)

$$a(r) = (r, \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} (0, 0) \quad \text{y} \quad b(r) = (r, \frac{3\pi}{4}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} (0, 0)$$

Resulta

$$g(a(r)) = \frac{1}{r} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}/2)^2} = 2\sqrt{2} \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

$$g(b(r)) = \frac{1}{r} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{(\sqrt{2}/2)^2} = 0 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

Ahora sí podemos afirmar que el límite no existe.

4. Analizar la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2 + y^2}$

Sea $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2 + y^2}$. Como sabemos que cuando $\varphi(x, y) \rightarrow 0$: $\frac{\text{sen}(\varphi(x, y))}{\varphi(x, y)} \rightarrow 1$ se nos podría ocurrir hacer lo siguiente

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2y} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

con lo cual tendríamos resuelto el cálculo. Pero ... el dominio del segundo miembro no es el mismo que el de f . El único punto donde no está definida f es el origen, mientras que la otra función no está definida sobre los ejes.

Si bien este inconveniente se podría eludir considerando la función

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2y} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

y comprobando que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, es mucho más simple hacer lo siguiente

$$\left| \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|\text{sen}(x^2y)|}{x^2 + y^2} \leq \underset{|\text{sen } t| \leq |t|}{\frac{|x^2y|}{x^2 + y^2}} = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

debido a que el primer factor $|y|$ tiende a cero y el segundo $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ está acotado (entre 0 y 1).

5. Probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})} \frac{\text{sen}(\pi - y) + \cos x}{x^2 + y^2} = \frac{8}{\pi^2}$

Teniendo en cuenta que

$$\text{sen}(\pi - y) \xrightarrow{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})} \frac{\pi^2}{4} \neq 0$$

resulta, a partir de las propiedades del límite,

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - y) + \cos x}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})} \frac{1 + 1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{8}{\pi^2}$$

Importante

- ▶ *Si no se pide probar un límite por definición, se pueden usar los resultados probados en clase.*
- ▶ *Los límites de funciones de una variable se pueden calcular usando los resultados conocidos (por ejemplo: la regla de L'Hospital si correspondiera).*
- ▶ *Los límites especiales, tales como*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

por citar dos ejemplos, tampoco necesitan ser probados nuevamente.