

CONTINUIDAD

Comenzaremos por ocuparnos de algunos resultados que necesitaremos en la demostración de ciertos teoremas sobre continuidad.

Teorema 1 (ENCAJE DE INTERVALOS)

Sea (I_n) una familia de intervalos cerrados y encajados tales que $\text{long}(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Entonces, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x\}$.

Demostración:

Sea $I_n = [a_n, b_n]$. Por estar encajados resulta que (a_n) es una sucesión creciente y (b_n) decreciente. Por lo tanto, $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ para todo $n \leq m$; luego, $a_n \leq b_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Esto muestra que (a_n) es una sucesión acotada superiormente y (b_n) acotada inferiormente y como además son monótonas sabemos que ambas tienen límite, siendo

$$a = \lim a_n = \sup\{a_n\} \leq \inf\{b_n\} = \lim b_n = b$$

De $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ se deduce que $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; luego, $a = b$ y además $a = b \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; i.e., existe $x = a = b \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$. Por último, si hubiera otro $y \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$ resultaría que $a \leq y \leq b$ lo que implica que $y = x$. $\square$

Teorema 2 (BOLZANO–WEIERSTRASS)

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Demostración:

Sea (a_n) una sucesión acotada. Luego, existe $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La idea será construir un encaje de intervalos en las condiciones del teorema anterior y mostrar que cada uno de ellos contiene un elemento de la sucesión. Consideremos los intervalos $[-M, 0]$ y $[0, M]$. En alguno de los dos debe haber infinitos n para los cuales a_n está en él. Llamemos $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ a este intervalo y convengamos que si en ambos hubiera infinitos términos de la sucesión entonces elegimos el de la izquierda. Notemos que $\text{long}(I_1) = M$. Sea n_1 tal que $a_{n_1} \in I_1$. Partimos ahora I_1 en su punto medio y repetimos lo hecho con $[-M, M]$. Llamamos $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ al intervalo resultante que tiene por longitud $\frac{1}{2}\text{long}(I_1) = \frac{M}{2}$. Como en I_2 hay infinitos elementos de la sucesión podemos asegurar que existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in I_2$.

Reiterando este procedimiento construimos un encaje de intervalos (I_n) con $\text{long}(I_n) = \frac{M}{2^{n-1}}$ y una sucesión (a_{n_k}) –subsucesión de la original– que satisface: $a_{n_k} \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Siendo que por construcción (I_k) es un encaje de intervalos cuyas longitudes tienden a cero resulta que $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x\}$ y como $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$, es claro que $a_{n_k} \rightarrow x$. Es decir, (a_n) tiene una subsucesión convergente. $\square$

Proposición 1

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $f(x) = e^x$ es suryectiva.

Demostración:

Debemos ver que dado $b > 0$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $e^a = b$. Consideremos el siguiente conjunto

$$C_b = \{x \in \mathbb{R} / e^x < b\}$$

Como $b > 0$ y $e^{-n} \rightarrow 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-m} < b$ lo que implica que $-m \in C_b$ y por lo tanto $C_b \neq \emptyset$. Además, si tomamos $k \in \mathbb{N}$ mayor que b resulta $e^k > k > b > e^x$ para todo $x \in C_b$. Esto dice que k es una cota superior de C_b . Entonces podemos hablar de $a = \sup C_b$. Veamos que este número cumple lo pedido, i.e., $e^a = b$.

Razonando por el absurdo, supongamos que $e^a \neq b$. Como f es creciente y a es el supremo de C_b no puede ser $e^a > b$. De modo que tendríamos $e^a < b$, i.e., $\frac{b}{e^a} > 1$. Pero $e^{1/n} \rightarrow 1$; luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{e^a} > e^{1/m} > 1$. Esto implica que $e^{a+1/m} < b$, de donde se concluye que $a + \frac{1}{m} \in C_b$; esto es imposible pues $a + \frac{1}{m} > a = \sup C_b$. $\square$

Definición

Una función definida en un entorno del punto a se dice **continua** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; o, equivalentemente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si f es continua en todo punto de un intervalo (a, b) , se dice que f es continua en (a, b) .

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, diremos que f es **continua a derecha** en a ; respectivamente, f será **continua a izquierda** en a cuando $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Observaciones

1. Una función es continua en un punto si y sólo si es continua a derecha e izquierda en ese punto.
2. Una función f es continua en a si y sólo si $f(a_n) \rightarrow f(a)$ para toda sucesión (a_n) que converge a a .
3. Si f es continua en a y $f(a) > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

4. Si f es continua en a y $f(a) < 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
5. Sean f, g funciones continuas en a y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$, αf y $f \cdot g$ son continuas en a .
6. Si f y g son continuas en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a .
7. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a .

Los siguientes resultados están referidos a propiedades de funciones continuas sobre intervalos cerrados de longitud finita.

Proposición 2

Toda función continua sobre un intervalo cerrado es acotada sobre él.

Demostración:

Sean $a < b \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que no es acotada. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que no es acotada superiormente. En tal caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$. Esto nos dice que $f(x_n) \rightarrow \infty$.

Por otro lado, como $(x_n) \subset [a, b]$ resulta ser una sucesión acotada y por un resultado anterior sabemos que tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente a un valor $c \in [a, b]$. Entonces tenemos

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(c) \quad \text{y} \quad f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$$

lo que es claramente contradictorio. Luego, f debe ser acotada.

Teorema 3 (WEIERSTRASS)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a, b]$; i.e., f alcanza su máximo y su mínimo valor.

Demostración:

Vamos a probar la existencia del máximo valor de f ; para el mínimo se procede de manera enteramente análoga.

Por la proposición anterior sabemos que f es acotada; luego, existen

$$m = \inf\{f(x) / x \in [a, b]\} \quad \text{y} \quad M = \sup\{f(x) / x \in [a, b]\}$$

Si fuese $M \neq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, la función $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ sería continua en $[a, b]$ y por lo tanto acotada. De donde, teniendo en cuenta que $f(x) < M$, concluiríamos que para algún $K > 0$ es $0 < g(x) < K$ para todo $x \in [a, b]$. Con lo cual sería $f(x) < M - \frac{1}{K}$ para todo $x \in [a, b]$, lo que es imposible por ser M el supremo de $f([a, b])$. De manera entonces que debe existir al menos un $x_2 \in [a, b]$ tal que $M = f(x_2)$; i.e., $f(x_2)$ es el máximo valor que toma f en el intervalo $[a, b]$. $\square$

Teorema 4 (BOLZANO)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración:

Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$; el otro caso es análogo. La idea será construir un encaje de intervalos cuya intersección sea $\{c\}$. Llamemos α_1 al punto medio del intervalo $[a, b]$. Si $f(\alpha_1) = 0$ basta tomar $c = \alpha_1$. Si $f(\alpha_1) \neq 0$ definimos

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a, \alpha_1] & \text{si } f(\alpha_1) > 0 \\ [\alpha_1, b] & \text{si } f(\alpha_1) < 0 \end{cases} \subset [a, b]$$

luego, $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ (i.e., está en las mismas condiciones que el intervalo original) y $\text{long}(I_1) = \frac{b-a}{2}$. Aplicamos el mismo procedimiento ahora al intervalo I_1 . Sea α_2 el punto medio de I_1 . Si $f(\alpha_2) = 0$ basta tomar $c = \alpha_2$. Si $f(\alpha_2) \neq 0$ definimos

$$I_2 = [a_2, b_2] = \begin{cases} [a, \alpha_2] & \text{si } f(\alpha_2) > 0 \\ [\alpha_2, b] & \text{si } f(\alpha_2) < 0 \end{cases} \subset I_1 \subset [a, b]$$

de nuevo tenemos que f cambia de signo en los extremos de este intervalo y $\text{long}(I_2) = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$.

Reiterando este procedimiento construimos un encaje de intervalos cerrados (I_n) cuyas longitudes $(\frac{b-a}{2^n})$ tienden a cero. Además podemos suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ ya que si para algún n fuera $f(\alpha_n) = 0$ bastaría tomar $c = \alpha_n$ para concluir la demostración del teorema.

Ahora bien, por el teorema 1 sabemos que existe $c \in [a, b]$ tal que $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{c\}$. Para terminar la demostración del teorema sólo nos resta ver que $f(c) = 0$. Pero como para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

y ambas sucesiones convergen a $f(c)$ debido a la continuidad de f , resulta que

$$f(c) \leq 0 \leq f(c)$$

i.e., $f(c) = 0$. □

Corolario 1 (TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO)

Sean $\alpha < \beta$ dos números reales y $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\alpha, \beta \in \text{Im}(f)$. Entonces, $[\alpha, \beta] \subset \text{Im}(f)$.

Demostración:

Dado $y \in [\alpha, \beta]$, basta aplicar el resultado anterior a la función $g(x) = f(x) - y$. □

Teorema 5 (CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente (resp. decreciente) y continua. Entonces,

- (i) $f : (a, b) \rightarrow (f(a), f(b))$ (resp. $f : (a, b) \rightarrow (f(b), f(a))$) es biyectiva.
- (ii) $f^{-1} : (f(a), f(b)) \rightarrow (a, b)$ (resp. $f : (f(b), f(a)) \rightarrow (a, b)$) es continua.

Demostración:

Lo hacemos para el caso en que f es creciente, el otro es totalmente análogo.

◇ (i)

La inyectividad es consecuencia inmediata de ser estrictamente monótona y la suryectividad del teorema del valor intermedio.

◇ (ii)

Dado $y_0 \in (f(a), f(b))$, debemos ver que f^{-1} es continua en y_0 . Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = y_0$. Tomemos $\alpha > 0$ tal que $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (a, b)$.

Dado $0 < \varepsilon < \alpha$, la condición $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ es equivalente —gracias a la monotonía de f — a $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$.

Entonces, si tomamos $\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\} > 0$, obtendremos que para $|y - y_0| = |y - f(x_0)| < \delta$ es

$$f(x_0 - \varepsilon) - y_0 < -\delta < y - y_0 < \delta < f(x_0 + \varepsilon)$$

i.e., $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$ lo que implica $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Esto prueba la continuidad de f^{-1} . □

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **uniformemente continua** en A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| < \delta \quad \implies \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Observaciones

1. Toda función uniformemente continua en un conjunto A es continua en todo punto de A .
2. Si f es uniformemente continua en (a, b) y $(x_n) \subset (a, b)$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy. Este resultado no es cierto si sólo se pide la continuidad de f .
3. Una función f **no** es uniformemente continua en un conjunto A si y sólo si existen dos sucesiones $(x_n), (y_n) \subset A$ y un número $\alpha > 0$ tales que

$$\triangleright |x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\triangleright |f(x_n) - f(y_n)| \geq \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 6 (HEINE–CANTOR)

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es uniformemente continua en él.

Demostración:

Razonando por el absurdo, supongamos que f no es uniformemente continua en $[a, b]$. Por la observación anterior sabemos que existen dos sucesiones $(x_n), (y_n) \subset [a, b]$ y un número $\alpha > 0$ tales que

$$|x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Como (x_n) es acotada, el teorema 2 nos dice que tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge a un $x \in [a, b]$. Consideremos la correspondiente subsucesión (y_{n_k}) de (y_n) y llamémoslas –respectivamente– (ξ_k) y (η_k) . Entonces, de (ξ_k) sabemos que converge a x y de (η_k) que es acotada, por lo tanto también tiene una subsucesión (η_{k_j}) que converge a un $y \in [a, b]$. Nuevamente consideremos la correspondiente subsucesión (ξ_{k_j}) de (ξ_k) .

Por ser (ξ_{k_j}) subsucesión de (x_n) y (η_{k_j}) de (y_n) se tiene

$$|\xi_{k_j} - \eta_{k_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad |f(\xi_{k_j}) - f(\eta_{k_j})| \geq \alpha \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

pero también verifican

$$|\xi_{k_j} - \eta_{k_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |x - y| \quad \text{y} \quad |f(\xi_{k_j}) - f(\eta_{k_j})| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |f(x) - f(y)|$$

en virtud de la convergencia de ambas y de la continuidad de f en $[a, b]$. Se deduce de aquí que necesariamente debe ser $x = y$, con lo cual $(f(\xi_{k_j}))$ y $(f(\eta_{k_j}))$ deben satisfacer simultáneamente

$$|f(\xi_{k_j}) - f(\eta_{k_j})| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad |f(\xi_{k_j}) - f(\eta_{k_j})| \geq \alpha \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

lo que es claramente contradictorio.

Luego, f es uniformemente continua en $[a, b]$. □