Extremos Libres: locales y absolutos

(tres ejemplos)

1. ***Sea*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ***dada por*** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$**.**

a) ***Probar que*** $(0,0)$ ***es un punto crítico pero no extremo***

b) ***Probar que*** $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ ***son mínimos absolutos estrictos***

c) ***¿Hay máximos absolutos?***

Comencemos por calcular el gradiente de f

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4(x-y), 4y^3 + 4(x-y)) = 4(x^3 - x + y, y^3 - y + x)$$

Siendo la función diferenciable en todo punto, los únicos puntos donde puede haber extremos son los puntos críticos; es decir, las soluciones de

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones llegamos a que debe ser

$$x^3 = -y^3$$

o sea

$$y = -x$$

Reemplanzando en la primera ecuación llegamos a que

$$x^3 - 2x = 0$$

de donde

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 = 2$$

lo que implica –recordando que debe ser $y = -x$– que las soluciones son

$$(0,0) \quad , \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad , \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Otras cálculos que nos conviene tener hechos corresponden a las derivadas segundas de f

$$MHf(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

a)

Si calculamos la matriz Hessiana de f en $(0,0)$

$$MHf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $(-1)(-1) - 1.1 = 0$. El criterio no decide en este caso; de modo entonces que vamos a tener que intentar otro camino.

Notemos que si nos acercamos al origen por la recta $(x,0)$, el eje x, el incremento de la función toma valores

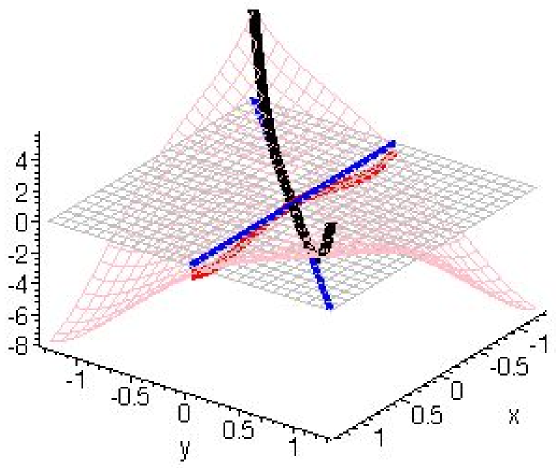
$$f(x,0) - f(0,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2)$$

que son negativos cuando $|x| < \sqrt{2}$; mientras que si nos acercamos por la recta (x,x), el incremento de la función vale

$$f(x,x) - f(0,0) = 2x^4$$

que claramente es positivo. Esto nos asegura que —en todo entorno del $(0,0)$— el incremento de la función cambia de signo y en consecuencia en $(0,0)$ hay un punto de ensilladura.

El siguiente gráfico ilustra el comportamiento de f cerca del origen. Las rectas azules son las que tomamos en el dominio de f para acercarnos al origen, la curva roja es la imagen del eje x y la curva negra la imagen de (x,x). El plano es $z = 0$, es decir, el domino de f.



b)

Sabemos que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son puntos críticos, analicemos la matriz Hessiana para ver si podemos decidir si son extremos

$$MHf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad MHf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ambos determinantes valen $24 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = 5 > 0$. Esto nos asegura que en ambos puntos la función toma valores mínimos locales.

Pero nos piden probar que son mínimos absolutos y esto no lo garantiza el criterio. Comencemos por calcular $f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = -8$; de modo entonces que deberemos probar que

$$f(x,y) > f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = -8$$

siempre que $(x,y) \neq \pm\sqrt{2}(1,-1)$.

En principio,

$$f(x,y) - f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8$$

pero teniendo en cuenta que

$$x^4 - 2x^2 = (x^2-2)^2 + 2x^2 - 4 \quad , \quad y^4 - 2y^2 = (y^2-2)^2 + 2y^2 - 4$$

resulta que

$$f(x,y) - f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x^2+y^2+2xy) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 \geqslant 0$$

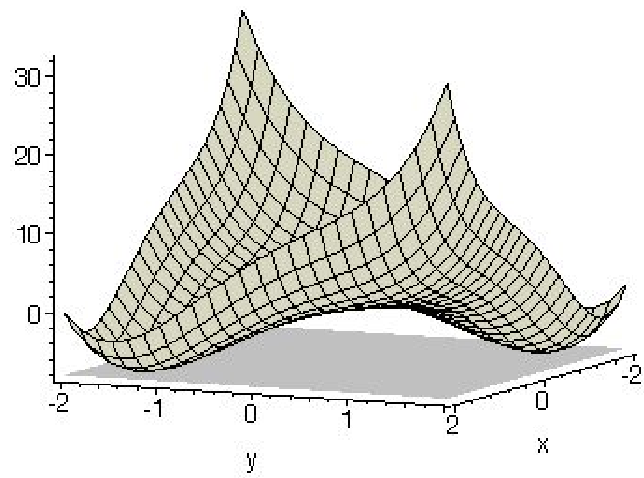
para todo (x,y) y únicamente vale 0 cuando

$$|x| = \sqrt{2} \quad , \quad |y| = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = -x$$

o sea, en los puntos $\pm\sqrt{2}(1,-1)$.

De esta forma queda probado que en estos puntos f toma mínimos absolutos.

El siguiente gráfico ilustra esta situación



c)

El gráfico anterior puede hacernos sospechar que f toma valores infinitamente grandes. Eso lo podemos comprobar analizando cómo se comporta f sobre la recta (x, x)

$$f(x, x) = 2x^4$$

se ve que f tiende a $+\infty$ cuando $x \to \infty$.

De modo que f no tiene máximos absolutos.

2. ***La función —diferencialble en todo el plano—***

$$f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

tiene un único punto crítico que es mínimo local pero no absoluto.

Hallemos los puntos críticos de f, es decir, las soluciones de

$$\nabla f(x,y) = \left(2xe^{-x^2} + y^2\frac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}}(e^x - 2xe^{-x^2}), -4y^3 + 4y\sqrt{e^x + e^{-x^2}}\right) = (0,0)$$

o sea

$$\begin{cases} 2xe^{-x^2} + y^2\frac{1}{\sqrt{e^x+e^{-x^2}}}(e^x - 2xe^{-x^2}) = 0 \\ y(y^2 - \sqrt{e^x + e^{-x^2}}) = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que

$$y = 0 \quad \text{o} \quad y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

Si $y = 0$, la primera ecuación nos dice que debe ser $x = 0$; obtenemos así que $(0,0)$ es punto crítico de f.

Si $y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$, entonces la primera ecuación se escribe

$$2xe^{-x^2} + e^x - 2xe^{x^2} = 0$$

es decir,

$$e^x = 0$$

concluimos que esta situación no se puede dar y por lo tanto el único punto crítico de f es el origen. Notemos además que f no puede tener extremos en otros puntos dado que es diferenciable en todo el plano.

Analicemos si hay extremo en el origen. Para ello necesitamos las derivadas segundas de f

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} \\
&\quad + y^2(-\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x^2})^{-3/2})(e^x - 2xe^{-x^2})^2 + (e^x + e^{-x^2})^{-1/2}(e^x - 2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= 2y\frac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}}(e^x - 2xe^{x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -12y^2 + 4\sqrt{e^x + e^{-x^2}}
\end{aligned}$$

y entonces,

$$MHf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

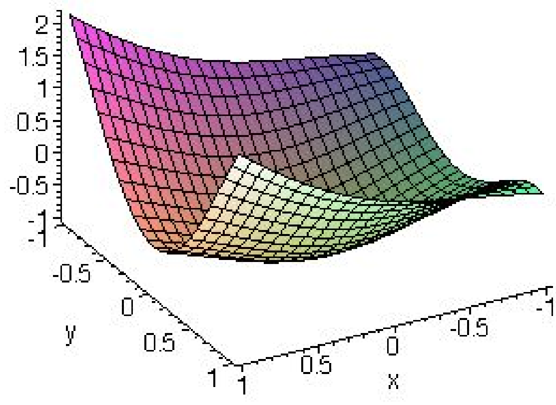
su determinante es $4(2\sqrt{2} - 1) > 0$ y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ resulta que f tiene en $(0,0)$ un mínimo local que vale -1.

Para ver que no es absoluto basta notar que

$$f(0, y) = -y^4 + 2\sqrt{2}y^2 - 1 = -y^2(y^2 - 2\sqrt{2}) - 1 \longrightarrow -\infty$$

cuando $y \to \infty$.

El siguiente gráfico ilustra el comportamiento de esta función



3. ***Analizar la existencia de extremos locales y absolutos de la función***

$$f(x,y) = -4y^4 + 8x^2y^2 - \frac{1}{32}x^2 + 3$$

Esta función, por ser diferenciable en todo punto, sólo puede tener extremos en sus puntos críticos. Calculemos entonces la solución de

$$\nabla f(x,y) = (16xy^2 - \tfrac{1}{16}x, -16y^3 + 16x^2y) = (0,0)$$

o sea,

$$\begin{cases} x(256y^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son

$$(0,0) \quad , \quad (\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{16}) \quad , \quad (-\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{16}) \quad , \quad (\tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{16}) \quad , \quad (-\tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{16})$$

Para analizar si son o no extremos vamos a calcular la matriz Hessiana de f

$$MHf(x,y) = \begin{pmatrix} 16y^2 - \frac{1}{16} & 32xy \\ 32xy & 16x^2 - 48y^2 \end{pmatrix}$$

En cada uno de los puntos críticos,

$$MHf(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad MHf(\pm\tfrac{1}{16}, \pm\tfrac{1}{16}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\frac{1}{8} \\ \pm\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Deducimos de aquí que –respecto del origen– el criterio no decide pero respecto de los demás puntos críticos podemos decir que son puntos de ensilladura dado que el determinante de la matriz Hessiana es negativo.

Analicemos qué sucede en el origen. El incremento de la función en el origen es

$$f(x,y) - f(0,0) = -4y^2 + 8x^2(y^2 - \tfrac{1}{256})$$

que es negativo si $\|(x,y)\| = \|(x,y) - (0,0)\| < \frac{1}{16}$.

En consecuencia, encontramos un entorno del origen donde

$$f(x,y) \leqslant f(0,0) = 3$$

Esto nos asegura que f tiene un máximo local en el origen.

Con respecto a los extremos absolutos, consideremos la imágenes por f de $(0,y)$ y (x,x)

$$f(0,y) = -4y^4 + 3 \longrightarrow -\infty \qquad \text{cuando} \quad y \to \infty$$

$$f(x,x) = 4x^4 - \frac{1}{32}x^2 + 3 \longrightarrow +\infty \qquad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

De modo que f no tiene extremos absolutos. El siguiente gráfico ilustra el comportamiento de esta función