PARAMETRIZACIONES

(de curvas y superficies)

MARÍA DEL CARMEN CALVO

I. *Curvas*

Una parametrización de una curva C es una función vectorial

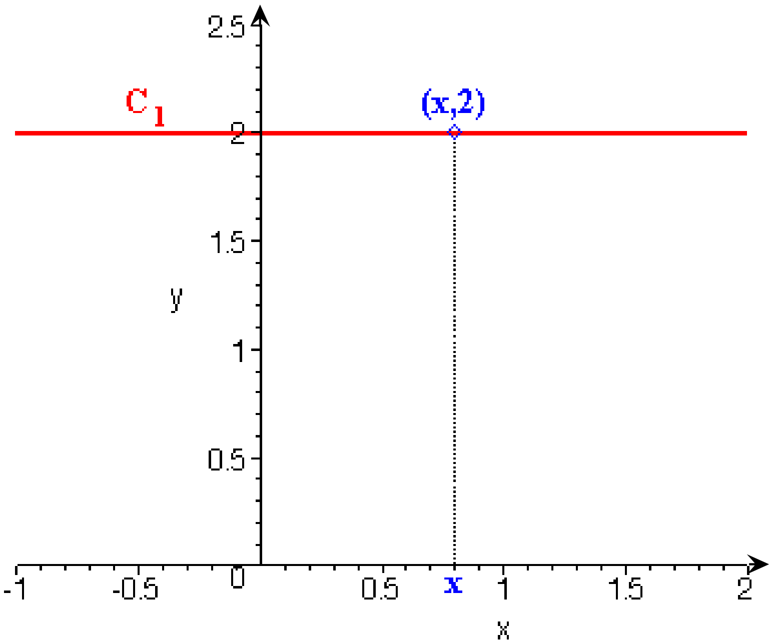
$$\mathbf{c} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

con la propiedad que —al variar el parámetro $t \in I$— su imagen $\mathbf{c}(t)$ va describiendo los puntos de C.

Una interpretación física habitual es pensar que el parámetro t representa al tiempo y que $\mathbf{c}(t)$ indica en qué posición del plano o del espacio se encuentra una partícula en el instante t.

Se presentan a continuación una serie de ejemplos con la intención de aportar ideas y métodos para describir paramétricamente a ciertas curvas.

1. $C_1 : \quad y = 2 \quad$ ***en*** $\quad \mathbb{R}^2$



Los puntos de C_1 son de la forma

$$(x, 2)$$

Cada valor de x produce un punto sobre la recta C_1. Es decir, la función

$$\mathbf{c}_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, 2)$$

es una parametrización de C_1.

2. $C_2 : \begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ***en*** $\mathbb{R}^3$

C_2 es una recta en $\mathbb{R}^3$, la intersección de los planos

$$\pi_1 : 3x - y - z = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : x + y = 2$$

Despejamos y de la ecuación de π_2:

$$y = 2 - x$$

y lo reemplazamos en la ecuación de π_1

$$3x - (2 - x) - z = 1$$

$$3x - 2 + x - z = 1$$

$$4x - z = 3$$

De aquí obtenemos que

$$z = 4x - 3$$

Luego, los puntos de C_2 son los (x, y, z) tales que

$$y = 2 - x \qquad \text{y} \qquad z = 4x - 3$$

con lo cual

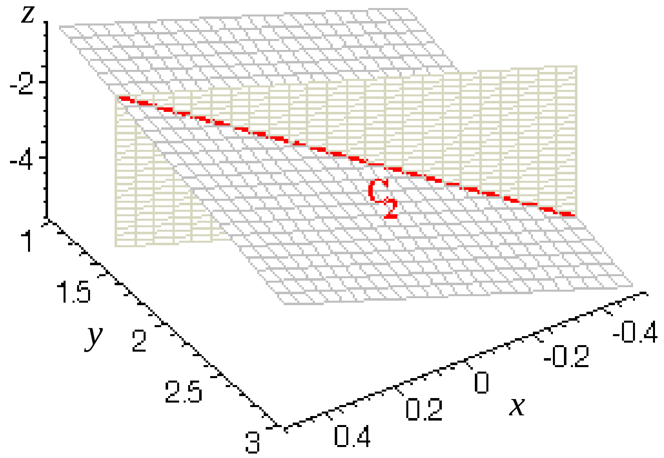
$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, 2 - x, 4x - 3) \\ &= (0, 2, -3) + (x, -x, 4x) \\ &= (0, 2, -3) + x(1, -1, 4) \end{aligned}$$

es decir, C_2 es la recta dirigida por el vector $(1, -1, 4)$ que pasa por el punto $(0, 2, -3)$.

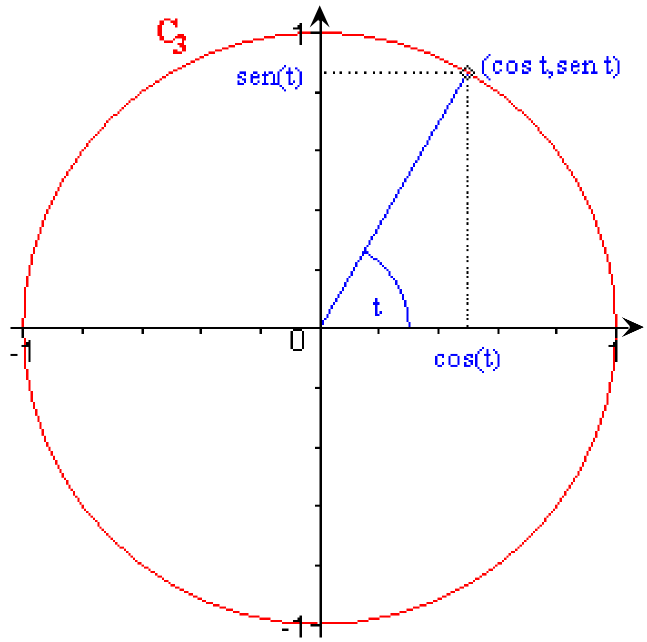
Una parametrización de C_2 es entonces

$$\mathbf{c}_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{c}_2(x) = (x, 2 - x, 4x - 3)$$



3. $C_3 : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad$ ***en*** $\quad \mathbb{R}^2$



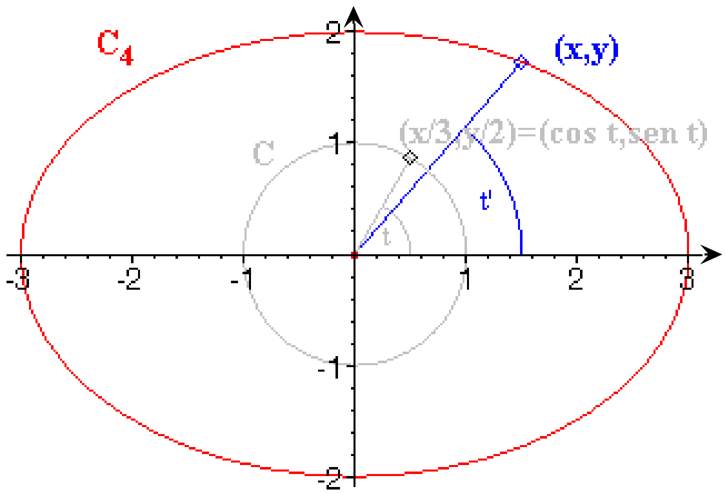
Una parametrización de esta circunferencia es la función

$$\mathbf{c}_3 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{c}_3(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

El parámetro t representa en este caso el ángulo que forma el vector de origen $(0, 0)$ y extremo (x, y) con el semieje positivo de las abscisas.

4. $C_4: \quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \quad$ ***en*** $\quad \mathbb{R}^2$



Para hallar una parametrización de esta elipse notemos que su ecuación se puede escribir en la forma

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

lo que significa que un punto $(x,y) \in C_4$ si y sólo si $(\frac{x}{3},\frac{y}{2}) \in C_3$. Pero en tal caso,

$$\frac{x}{3} = \cos t \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{2} = \operatorname{sen} t$$

para un $t \in [0,2\pi]$.

Despejando x e y obtenemos una parametrización de esta elipse

$$\mathbf{c}_4 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

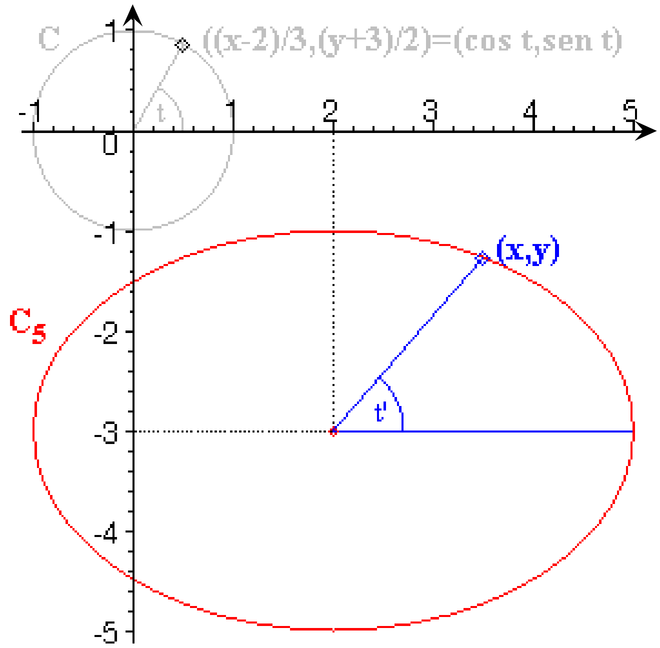
$$\mathbf{c}_4(t) = (3\cos t, 2\operatorname{sen} t)$$

Conviene observar que, como se ve en el gráfico, ahora t ya no tiene la misma interpretación que en el caso anterior.

5. $C_5: \quad \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1 \quad$ ***en*** $\quad \mathbb{R}^2$

Comencemos por notar que $(x,y) \in C_5$ si y sólo si $(x-2,y+3) \in C_4$. Luego, para cada $(x,y) \in C_5$ habrá un $t \in [0,2\pi]$ tal que

$$\frac{x-2}{3} = \cos t \qquad \text{e} \qquad \frac{y+3}{2} = \operatorname{sen} t$$



De modo que una parametrización de esta elipse está dada por

$$\mathbf{c}_5 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{c}_5(t) = (3\cos t + 2, 2\,\mathrm{sen}\, t - 3)$$

6. $C_6 : \quad x^2 - y^2 = 1 \quad$ ***en*** $\quad \mathbb{R}^2$

En primer lugar vamos a parametrizar la rama derecha de esta hipérbola, llamada *hipérbola equilátera*. A partir de esa trayectoria construiremos luego –por simetría respecto del eje y– la parametrización de la rama izquierda.

Sobre la rama derecha es $x \geqslant 1$; luego, podemos despejarla de la ecuación

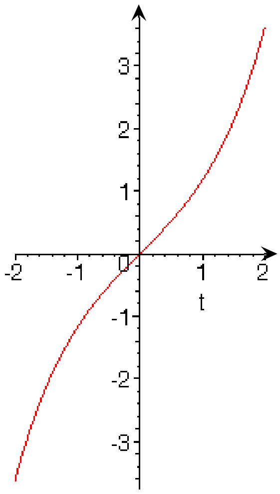
$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

Esto ya nos daría una forma describir paramétricamente los puntos de C_6 mediante la función

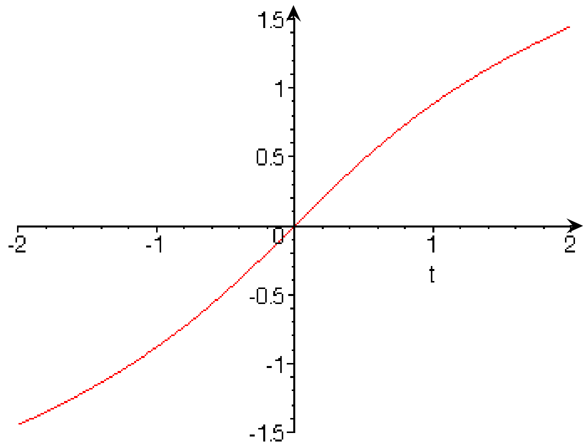
$$\mathbf{d}(y) = (\sqrt{y^2 + 1}, y)$$

definida en $\mathbb{R}$. Pero vamos a encontrar otra parametrización utilizando las funciones hiperbólicas de manera análoga a lo hecho con la circunferencia y las funciones trigonométricas.

Recordemos que la función senh t es biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$, derivable y su inversa –argsenh– tiene estas mismas propiedades



senh



argsenh

Esto nos permite pensar a cada $y \in \mathbb{R}$ como

$$y = \operatorname{senh} t$$

para un único $t \in \mathbb{R}$ [1]. De esta forma,

$$x = \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{senh}^2 t + 1} = \cosh t$$

en virtud de la identidad hiperbólica

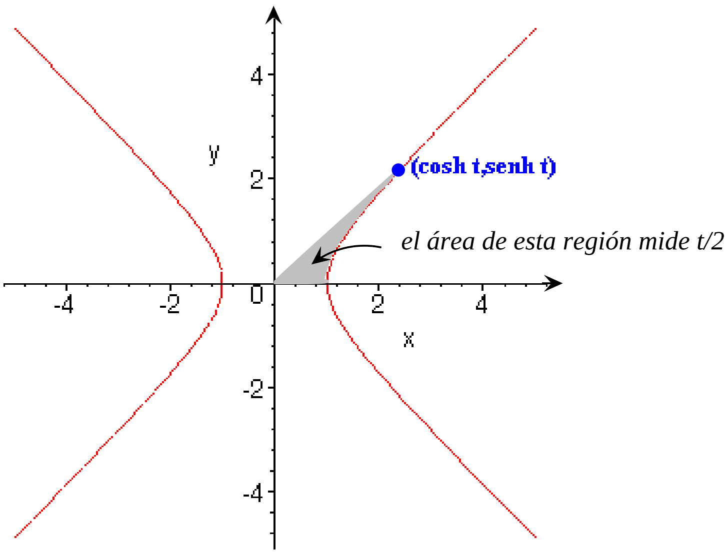
$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

y del hecho que $\cosh t \geqslant 1 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Resulta entonces que cada punto de la rama derecha de la hipérbola equilátera se puede expresar en la forma

$$(\cosh t, \operatorname{senh} t)$$

para un único $t \in \mathbb{R}$ tal como se muestra en el siguiente gráfico.



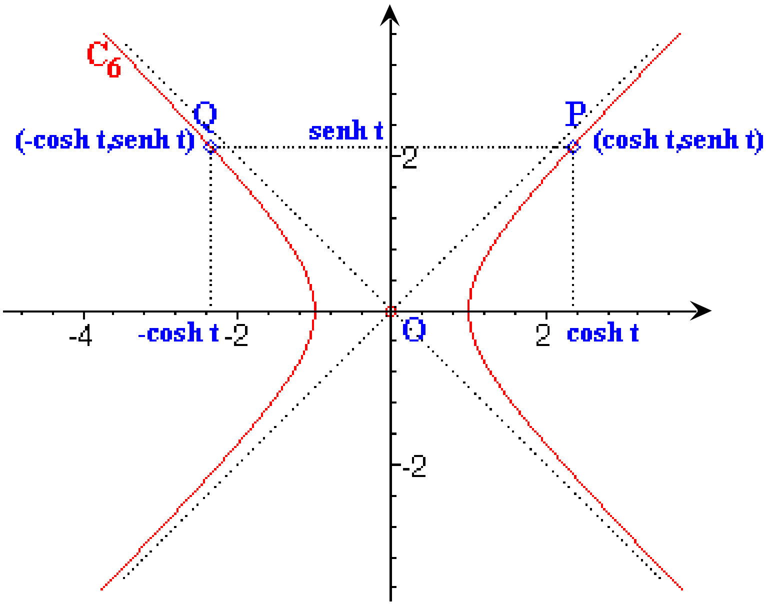
[1]claramente debe ser $t = \operatorname{argsenh} y$

La verificación de que el parámetro t se puede interpretar como el doble del área de la región sombreada requiere un simple cálculo integral.

Ya estamos en condiciones de escribir la parametrización prometida de la rama derecha de la hipérbola equilátera,

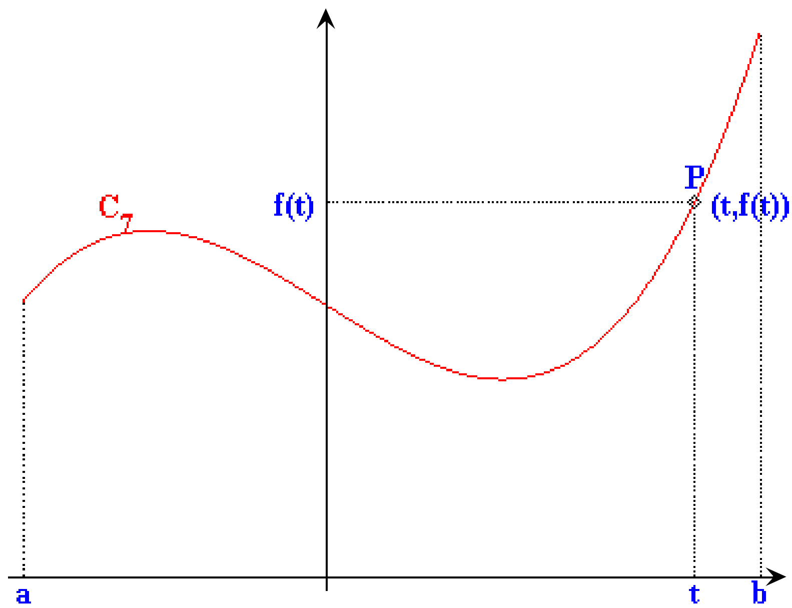
$$\mathbf{c}_{6d} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad , \qquad \mathbf{c}_{6d}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$$

La siguiente figura ilustra cómo definir la parametrización de la rama izquierda



$$\mathbf{c}_{6i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad , \qquad \mathbf{c}_{6i}(t) = (-\cosh t, \operatorname{senh} t)$$

7. C_7 : ***gráfico de*** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$



Tal como se muestra en la figura anterior, cada punto del gráfico de f se puede expresar en la forma

$$(t, f(t))$$

para $t \in [a, b]$. Luego, una parametrización de C_7 estará dada por

$$\mathbf{c}_7 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{c}_7(t) = (t, f(t))$$

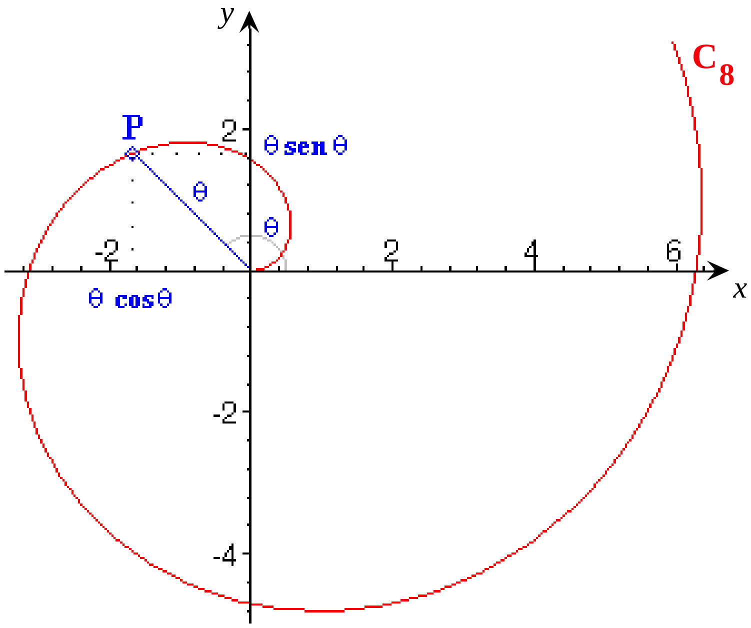
8. C_8 : $\quad r = \theta \quad$ ***(coordenadas polares)***

Notemos que, si expresáramos a las coordenadas de la parametrización en coordenadas polares, la expresión claramente sería

$$(\theta, \theta)$$

para $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ dado que r debe ser positivo.

Con la ayuda del siguiente gráfico tratemos de hallar una parametrización usando coordenadas cartesianas.



Dado $P \in C_8$, sus coordenadas polares necesariamente son (θ, θ) para algún $\theta \geqslant 0$; por lo tanto, sus coordenadas cartesianas serán

$$(\theta \cos \theta, \theta \operatorname{sen} \theta)$$

para $\theta \geqslant 0$.

Deducimos de aquí la fórmula de una parametrización de esta espiral

$$\mathbf{c}_8 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{c}_8(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t)$$

9. $C_9 = \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{c}_9)$ ***, donde*** $\quad \boldsymbol{c}_9 : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \boldsymbol{c}_9(t) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t, t)$

Esta curva recibe el nombre de *hélice circular*. Si llamamos $(x(t), y(t), z(t))$ a las componentes de $\mathbf{c}_9(t)$

$$x(t) = \cos t \qquad , \qquad y(t) = \mathrm{sen}\, t \qquad , \qquad z(t) = t$$

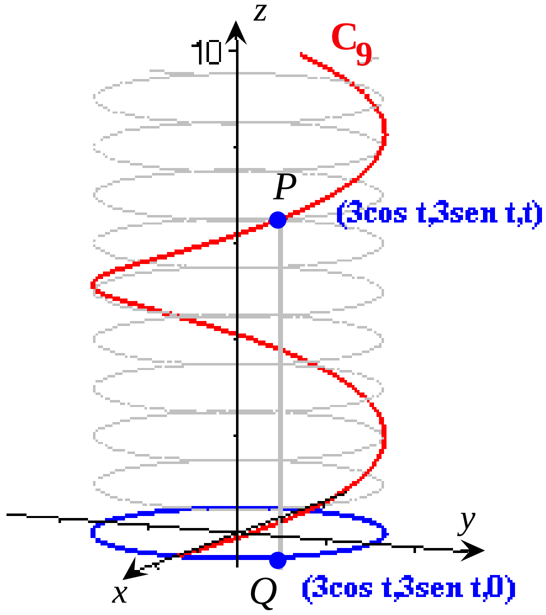
Las dos primeras satisfacen

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

Esto muestra que su imagen está contenida en el cilindro de ecuación

$$x^2 + y^2 = 9$$

La figura siguiente ilustra lo que acabamos de afirmar y nos va a permitir encontrar muy fácilmente una parametrización para la proyección de esta curva sobre el plano xy



Claramente la proyección de la hélice sobre el plano xy es la intersección de dicho plano con el cilindro antes mencionado (*en el gráfico, la curva azul*) pues cada punto P de la hélice *cae verticalmente* sobre el punto Q de dicha intersección.

La proyección de la hélice sobre el plano xy se expresa (en $\mathbb{R}^3$) mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$ [2]

[2]Conviene observar que —en $\mathbb{R}^3$— la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ representa un cilindro, no una curva.

O sea, la circunferencia de radio 3 centrada en el origen contenida en el plano xy.

Queda entonces claro que una parametrización de esta curva está dada por

$$\mathbf{d}_9 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{d}_9(t) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t, 0)$$

10. $C_{10} = \boldsymbol{Im(c_{10})}$ ***, donde*** $\quad \boldsymbol{c}_{10} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \boldsymbol{c}_{10}(t) = (\cosh t, \mathrm{senh}\, t, t)$

Si, como en el caso anterior, llamamos $(x(t), y(t), z(t))$ a las componentes de $\mathbf{c}_{10}(t)$

$$x(t) = \cosh t \qquad , \qquad y(t) = \mathrm{senh}\, t \qquad , \qquad z(t) = t$$

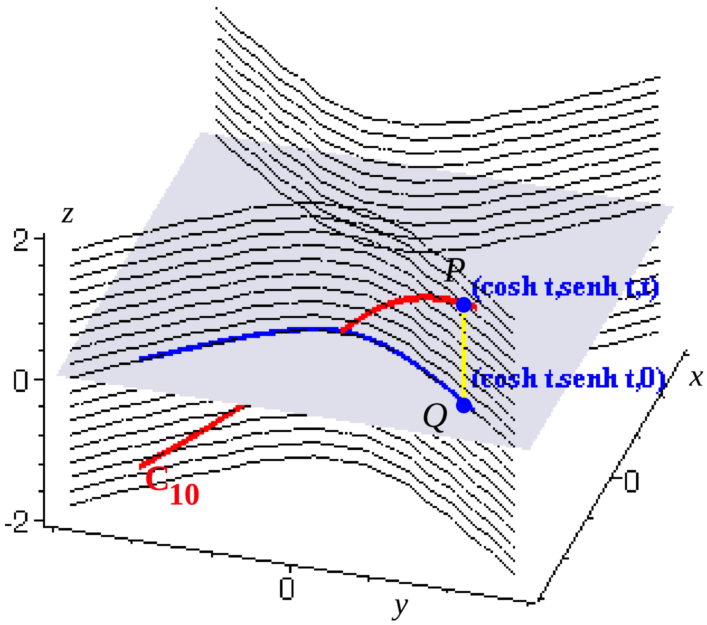
Las dos primeras satisfacen

$$x(t)^2 - y(t)^2 = 1$$

lo que nos dice que la traza de esta curva se encuentra sobre el cilindro hiperbólico de ecuación

$$x^2 - y^2 = 1$$

Más precisamente, sobre una de sus hojas. Esta situación se ilustra en la siguiente figura



Como en el caso anterior, nuestro objetivo en este ejemplo es hallar una parametrización de la proyección de la traza de $\mathbf{c}_{10}$ sobre el plano xy.

Siendo que la curva en cuestión está sobre una superficie cilíndrica, el cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 1$, que es ortogonal al plano xy (sobre el que queremos proyectar) su proyección será la intersección

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Tal como se ve en el gráfico, esta curva es una de las ramas de la hipérbola equilátera sobre el plano xy. Y por lo tanto, podemos decir que la función

$$\mathbf{d}_{10} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{d}_{10}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, 0)$$

es una parametrización de esta curva.

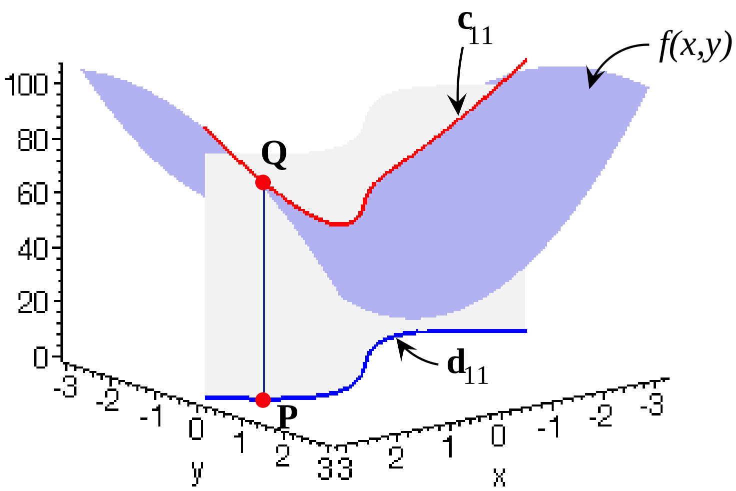
11. *Imagen de una curva en el plano xy por una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*

Como último ejemplo haremos un proceso inverso al de los dos previos. Partimos de una curva en el plano xy

$$\mathbf{d}_{11} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad \mathbf{d}_{11}(t) = (t, \operatorname{sen} t, 0)$$

y queremos hallar una parametrización de la curva obtenida al *subir* [3] los puntos de la traza de $\mathbf{d}_{11}$ al gráfico de una función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad f(x, y) = 4x^2 - 3xy - 2y^2$$



[3] o *bajar*

Si *subimos* el punto P de la traza de $\mathbf{d}_{11}$ al gráfico de f obtenemos el punto Q. Decir esto es lo mismo que decir que el punto Q se proyecta, sobre el plano xy en el punto P. Se deduce de aquí que ambos comparten sus dos primeras coordenadas; más precisamente, siendo

$$P = (t, \operatorname{sen} t, 0)$$

Q debe tener la forma

$$Q = (t, \operatorname{sen} t, z)$$

pero como además está sobre el gráfico de f, su última coordenada debe ser la imagen de las dos primeras. Luego,

$$Q = (t, \operatorname{sen} t, f(t, \operatorname{sen} t))$$

De esta forma, la función

$$\mathbf{c}_{11} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{c}_{11}(t) = (t, \operatorname{sen} t, f(t, \operatorname{sen} t))$$

es la parametrización que buscamos.

II. *Superficies*

Una parametrización de una superficie en $S \subset \mathbb{R}^3$ es una aplicación

$$\boldsymbol{\phi} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que —al variar los parámetros $s \in [a, b]$ y $t \in [c, d]$— su imagen $\boldsymbol{\phi}(s, t)$ va describiendo los puntos de la superficie S.

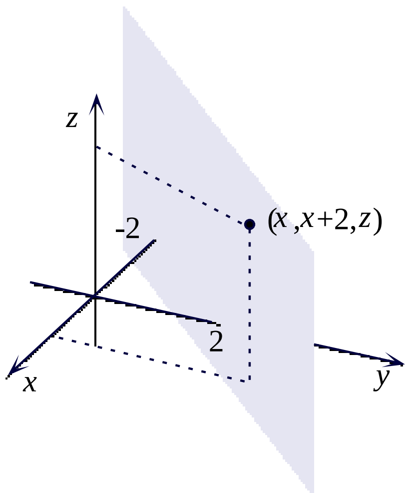
En esta sección vamos a presentar parametrizaciones de las cuádricas y de algunas otras superficies destacadas.

1. S: $\quad y - x = 2 \quad$ *(plano vertical)*

Los puntos de S se caracterizan por tener vinculadas sus dos primeras coordenadas por la relación

$$y = x + 2$$

mientras que la última coordenada puede tomar cualquier valor.



Luego, la aplicación

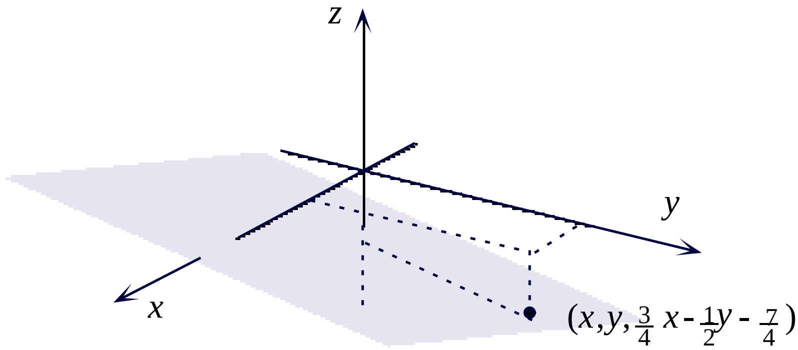
$$\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \boldsymbol{\phi}(x, z) = (x, x + 2, z)$$

es una parametrización del plano S.

2. $S:\quad 3x - 2y + 4z = 1$ ***(plano no vertical)***

Como es un plano no vertical, el coeficiente de z siempre será no nulo y podremos despejar z de la ecuación que define a S. En nuestro caso,

$$z = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{7}{4}$$



Por lo tanto, un punto $(x, y, z) \in S$ si y sólo si

$$(x, y, z) = (x, y, \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{7}{4})$$

donde x, y son números reales cualesquiera. Luego, la aplicación

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \quad \phi(x, y) = (x, y, \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{7}{4})$$

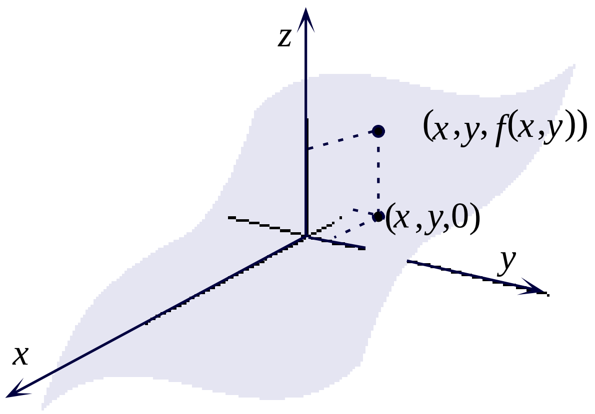
es una parametrización de S.

3. $S:\quad z = f(x, y)$ ***(gráfico de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$)***

El gráfico de f se define como

$$\text{gráf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y) \in A \quad \text{y} \quad z = f(x, y)\}$$

De modo que lo que caracteriza a los puntos de este conjunto es que su última coordenada es la imagen –por f– de las dos primeras, que deben estar en el dominio de f. Gráficamente,

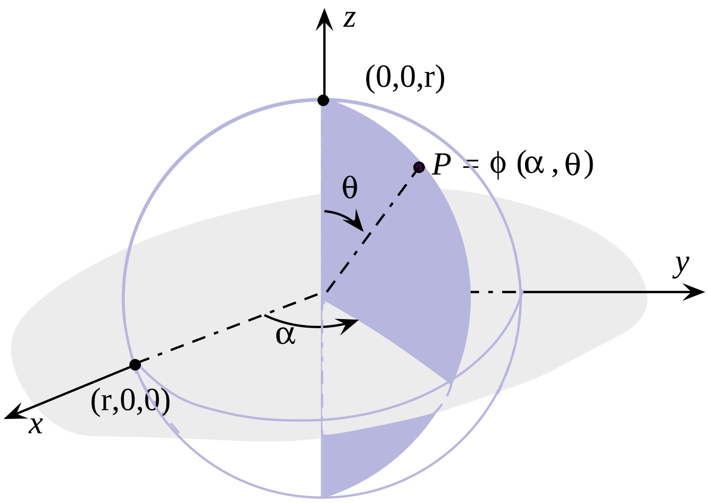


Podemos decir entonces que la aplicación

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \phi(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

es una parametrización del gráfico de f.

4. $S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ***(esfera de radio r)***



α = *constante* $\qquad$ θ = *constante*

Meridiano $\qquad$ *Paralelo*

Recordando la definición de las coordenadas esféricas, un punto $(x, y, z) \in S$ si y sólo si

$$(x, y, z) = (r\cos\alpha \operatorname{sen}\theta, r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$$

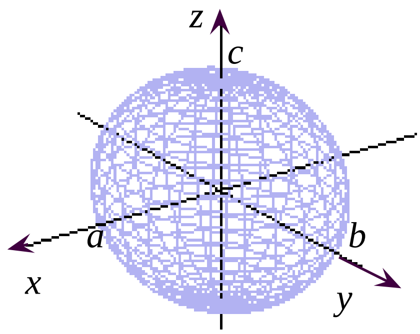
donde $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Luego, la aplicación

$$\boldsymbol{\phi} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \boldsymbol{\phi}(\alpha, \theta) = (r\cos\alpha \operatorname{sen}\theta, r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$$

es una parametrización de la esfera de radio r.

5. $S : \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ***(elipsoide)***



Siguiendo el procedimiento que utilizamos para encontrar una parametrización de la elipse a partir de la de la circunferencia, escribimos la ecuación de S en la forma

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

De modo que $(x, y, z) \in S$ si y sólo si $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})$ pertenece a la esfera de radio 1, por lo cual,

$$\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = (\cos\alpha \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

para $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Es decir,

$$(x, y, z) = (a\cos\alpha \operatorname{sen}\theta, b \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, c\cos\theta)$$

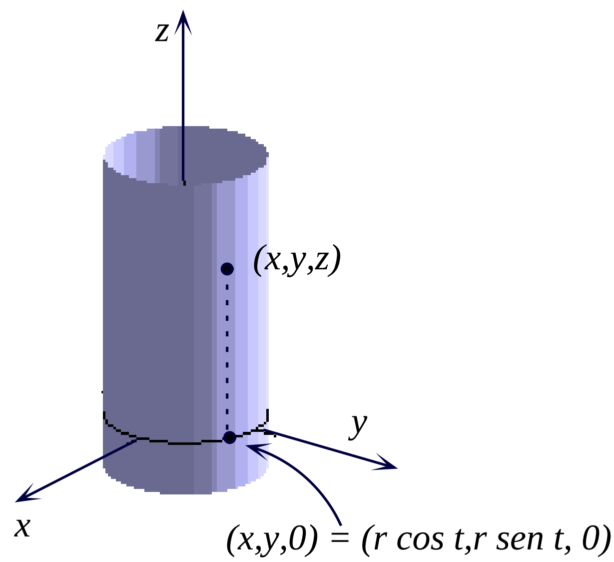
Podemos afirmar entonces que la función

$$\boldsymbol{\phi} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \boldsymbol{\phi}(\alpha, \theta) = (a \cos\alpha \operatorname{sen}\theta, b \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, c \cos\theta)$$

es una parametrización del elipsoide de semiejes a , b y c.

6. S : $x^2 + y^2 = r^2$ ***(cilindro circular)***

Los puntos de S tienen la particularidad que sus dos primeras coordenadas están vinculadas por la ecuación que define a S mientras que la última puede tomar cualquier valor totalmente independiente de las dos primeras. Además, según se ve en el gráfico



el par (x, y) pertenece a la circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio r, por lo cual sabemos que existe un $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$(x, y) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t)$$

Concluimos entonces que la aplicación

$$\boldsymbol{\phi} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \boldsymbol{\phi}(t, z) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, z)$$

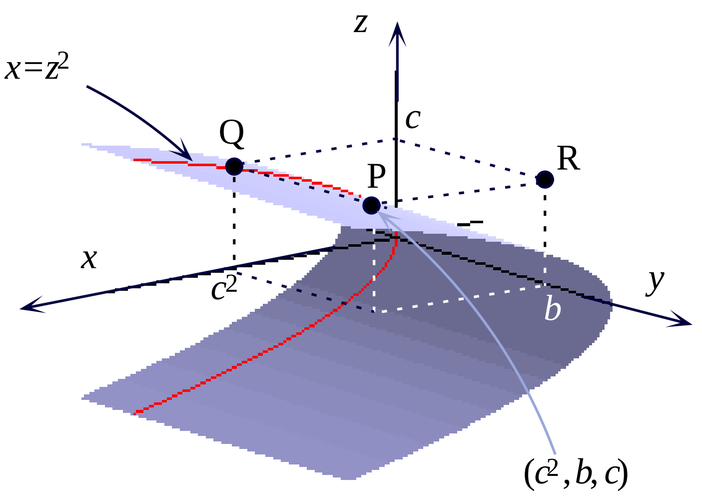
es una parametrización del cilindro S.

Nota: Un razonamiento análogo al hecho para obtener una parametrización del elipsoide a partir de una de la esfera proporciona una forma de parametrizar un cilindro elíptico.

7. $S: \quad x - z^2 = 0$ ***(cilindro parabólico)***

La condición que debe satisfacer un punto de $\mathbb{R}^3$ para estar en este cilindro afecta sólo a la primera y última coordenadas; la segunda puede tomar cualquier valor (totalmente independiente de las otras dos).

En la siguiente figura se muestra la proyección de un punto P de S sobre el plano xz (el punto Q) y sobre el plano yz (el punto R).



Al proyectarlo sobre el plano xz vemos que Q se mueve sobre la parábola

$$x = z^2$$

de modo que la siguiente aplicación es una parametrización de esta superficie

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \quad \phi(y, z) = (z^2, y, z)$$

Nota: también podríamos haber pensado que de la ecuación

$$x - z^2 = 0$$

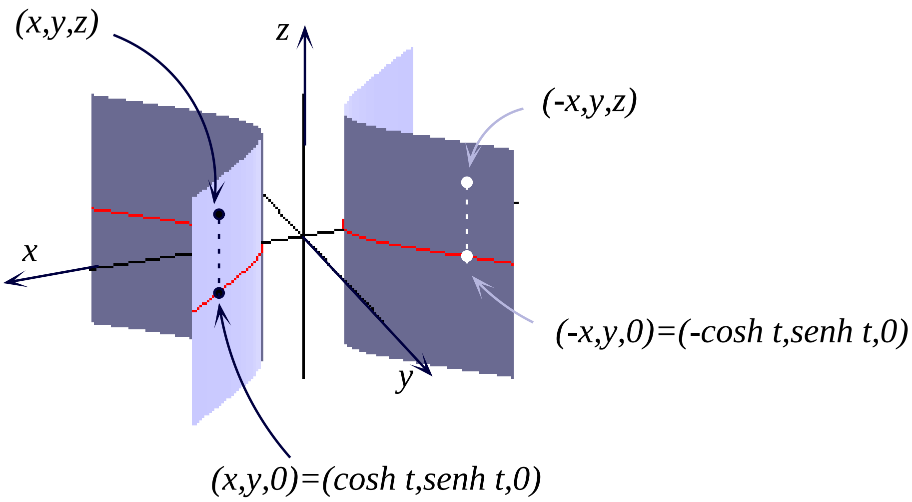
se puede despejar x como función de z y de esta forma interpertar a S como el gráfico de la función

$$x = f(z, y) = z^2$$

Utilizando el método aplicado en el ejemplo 3. llegamos a la misma parametrización de S.

8. $S: \quad x^2 - y^2 = 1$ ***(cilindro hiperbólico)***

Esta cuádrica, como todas las superficies cilíndricas [4] generadas por una recta que es paralela a uno de los ejes, tiene la propiedad que una de las coordenadas de sus puntos se mueve de manera independiente de las otras dos. En este caso, se trata de la variable z.



Basta entonces conseguir una parametrización de la curva $x^2 - y^2 = 1$ (pensada como curva, no como superficie) para obtener la de la superficie.

Como vimos en la sección anterior, para parametrizar la hipérbola completa debemos definir dos aplicaciones

$$\mathbf{c}_1(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, 0) \qquad , \qquad \mathbf{c}_2(t) = (-\cosh t, \operatorname{senh} t, 0)$$

ambas definidas en $\mathbb{R}$.

Luego, una parametrización del cilindro hiperbólico está dada por las aplicaciones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad &, \qquad \boldsymbol{\phi}_1(t, z) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, z) \\ \boldsymbol{\phi}_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad &, \qquad \boldsymbol{\phi}_2(t, z) = (-\cosh t, \operatorname{senh} t, z) \end{aligned}$$

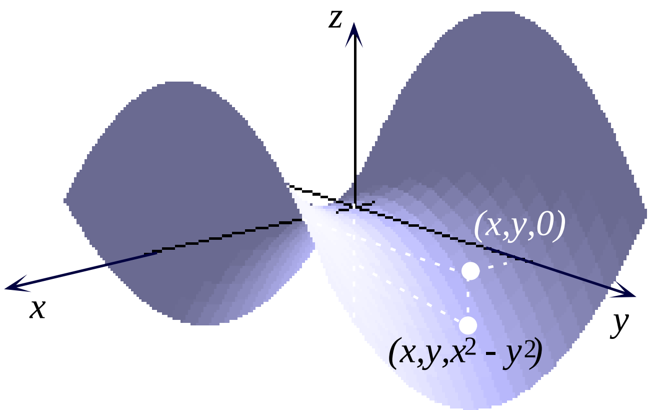
[4] superficie generada por una recta que se mueve paralelamente a sí misma y recorre una curva dada, según el diccionario de la Real Academia

9. $S\ :\quad z = x^2 - y^2$ ***(paraboloide hiperbólico)***

La ecuación de S muestra que se trata del gráfico de la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

cuyo dominio es $\mathbb{R}^2$. La siguiente figura ilustra este hecho,



De modo que, como vimos en un ejemplo anterior, una parametrización de S es

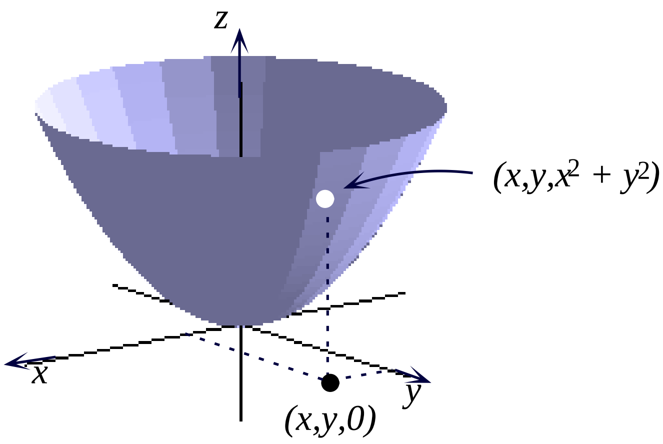
$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \quad \phi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$$

10. $S\ :\quad z = x^2 + y^2$ ***(paraboloide circular)***

Este caso es análogo al anterior pues también la ecuación de S muestra que se trata del gráfico de una función; esta vez de

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Gráficamente,



De modo que, una parametrización de S es

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \quad \phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

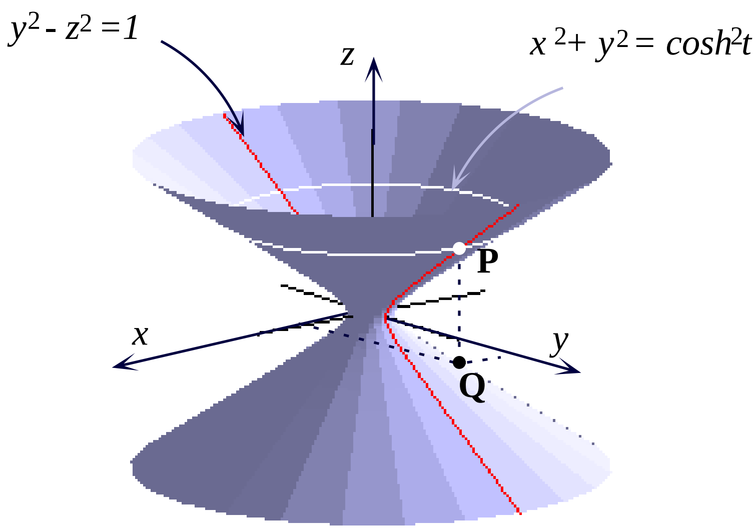
11. S : $\quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ***(hiperboloide de una hoja)***

La ecuación de S es equivalente a

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

Escrita de esta forma se ve [5] que los puntos de S verifican —para cada z fijo— que sus dos primeras coordenadas se mueven sobre la circunferencia centrada en $(0, 0, z)$ de radio $\sqrt{z^2 + 1}$ contenida en el plano horizontal que pasa por $(0, 0, z)$, como se ilustra en la siguiente figura,

[5] por ser $z^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$



Es decir, son de la forma

$$(\sqrt{z^2+1}\cos t,\ \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\, t, z)$$

para cada $z \in \mathbb{R}$ y cada $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Esto ya nos da una parametrización, pero vamos a utlizar las funciones hiperbólicas para encontrar otra que nos será más útil.

En la sección anterior recordamos que la función senh : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, derivable y su inversa argsenh : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ también es derivable. Por otro lado, de la identidad hiperbólica

$$\cosh^2 u - \mathrm{senh}^2 u = 1$$

se deduce inmediatamente que

$$\mathrm{senh}^2 u = \cosh^2 u + 1$$

Esto sugiere interpretar a cada $z \in \mathbb{R}$ como

$$z = \mathrm{senh}\, u$$

para un único $u \in \mathbb{R}$ [6] pues de esta forma,

$$\sqrt{z^2+1} = \sqrt{\mathrm{senh}^2 u + 1} = \sqrt{\cosh^2 u} = \cosh u$$

y de aquí deducimos que los puntos del hiperboloide de una hoja se pueden escribir en la forma

$$(\cosh u \cos t, \cosh u\, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{senh}\, u)$$

[6] claramente, $u = \mathrm{argsenh}\, z$.

Luego,

$$\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \boldsymbol{\phi}(u, t) = (\cosh u \cos t, \cosh u \,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{senh}\, u)$$

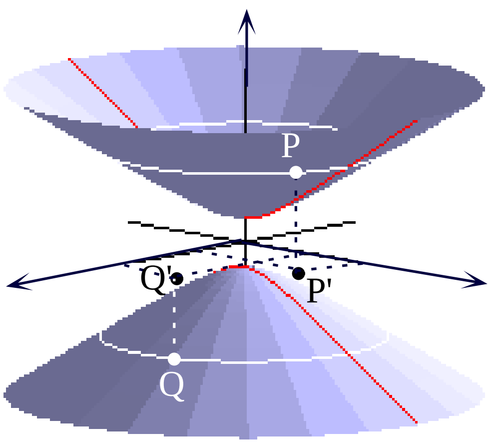
es una parametrización de S.

12. S : $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ ***(hiperboloide de dos hojas)***

Imitando el procedimiento seguido en el ejemplo anterior, despejamos $x^2 + y^2$ de la ecuación de S, que se escribe entonces

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

Una primera observación es que esta superficie no tiene nada en común con la parte del espacio encerrada entre los planos de ecuación $z = -1$ y $z = 1$ dado que debe ser $z^2 \geqslant 1$ para que el punto $(x, y, z) \in S$. Esto se ve claramente en la siguiente figura,



Como sucede con la hipérbola, en este caso también vamos a necesitar dos aplicaciones para parametrizar este hiperboloide.

Consideremos primero la hoja superior. Los puntos de esta parte satisfacen $z \geqslant 1$. Siendo la función $\cosh : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 1}$ biyectiva y derivable, con inversa $\mathrm{argcosh} : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ también derivable y recordando nuevamente la identidad hiperbólica, podemos pensar que cada $z \geqslant 1$ es de la forma

$$z = \cosh u$$

para un único $u \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Luego, todo punto $(x, y, z) \in S$ tal que $z \geqslant 1$ verifica

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1 = \cosh^2 u - 1 = \mathrm{senh}^2 u$$

para un $u \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Esto nos dice [7] que los puntos de la parte superior de S se corresponden exactamente con los de la forma

$$(\operatorname{senh} u \cos t, \operatorname{senh} u \operatorname{sen} t, \cosh u)$$

para $u \geqslant 0$ y $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

De modo que

$$\Phi_1 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \Phi_1(u, t) = (\operatorname{senh} u \cos t, \operatorname{senh} u \operatorname{sen} t, \cosh u)$$

es una parametrización de la hoja superior de S.

Con respecto a la hoja inferior, por razones de simetría respecto del plano xy, es claro que

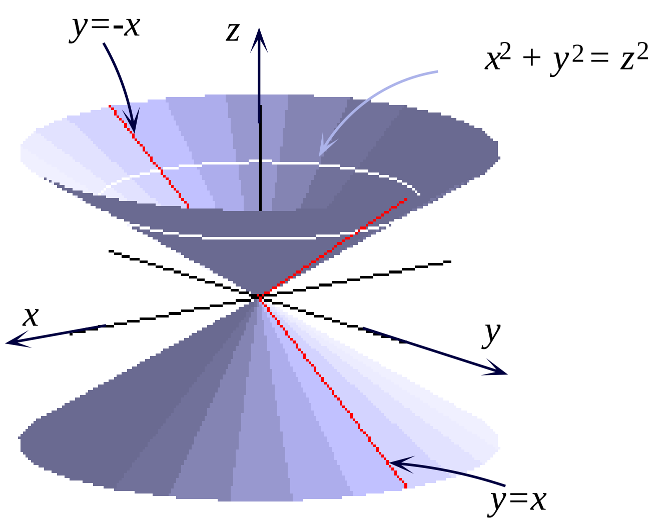
$$\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \qquad \Phi_2(u, t) = (\operatorname{senh} u \cos t, \operatorname{senh} u \operatorname{sen} t, -\cosh u)$$

es una parametrización de esa parte del hiperboloide de dos hojas.

13. S : $\quad z^2 = x^2 + y^2 \qquad$ ***(cono)***

Consideremos primero los puntos del cono tales que $z \neq 0$; i.e., cualquiera que no sea el vértice. Para ellos, la ecuación de S es equivalente a

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$



[7] recordar el gráfico de senh u

O sea, $(x, y, z) \in S$ si y sólo si $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ pertenece a la circunferencia unitaria. Luego,

$$\frac{x}{z} = \cos t \quad , \quad \frac{y}{z} = \operatorname{sen} t$$

para un $t \in [0, 2\pi]$. Es decir,

$$x = z\cos t \qquad , \qquad y = z \operatorname{sen} t$$

Llegamos entonces a que la aplicación

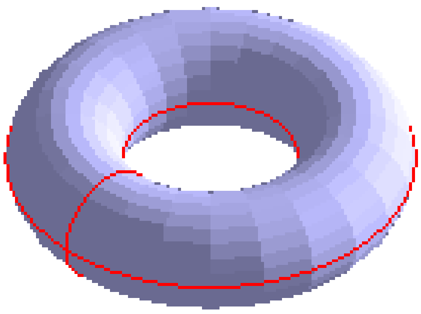
$$\boldsymbol{\phi} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dada por} \quad \boldsymbol{\phi}(t, z) = (z\cos t, z \operatorname{sen} t, z)$$

es una parametrización del cono.

Cabe observar que el vértice corresponde a $\boldsymbol{\phi}(t, 0)$ para cualquier $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

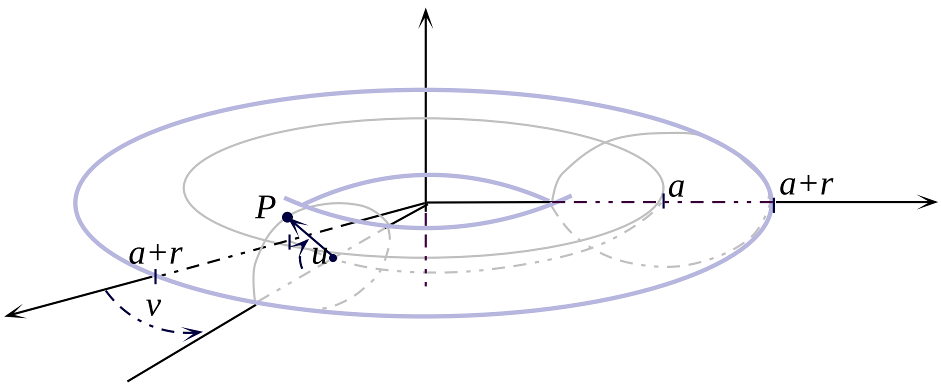
14. S : $\quad z^2 = r^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2$ ***, (a > r > 0)*** ***(toro)***

La siguiente figura ilustra la forma de esta superficie,



Podemos pensar en una porción de cilindro circular recto que esté confeccionado en un material flexible; lo doblamos de forma tal que coincidan los extremos. Así generamos el toro.

Con el objeto de hallar una descripción paramétrica de los puntos de S, consideremos el siguiente gráfico esquemático



P=((a+r cos(u)) cos(v) , (a+r cos(u)) sen(v),r sen(u))

A partir de él se puede hallar la manera de describir el punto genérico P de la superficie S en función de los parámetros $u, v \in [0, 2\pi]$.

Pero también lo podemos hacer a partir de su ecuación. Si $(x, y, z) \in S$,

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$$

por lo tanto, existe un $u \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\sqrt{x^2 + y^2} - a = r \cos u \qquad , \qquad z = r \operatorname{sen} u$$

o sea,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a + r \cos u \qquad , \qquad z = r \operatorname{sen} u$$

equivalentemente, [8]

$$x^2 + y^2 = (a + r \cos u)^2 \qquad , \qquad z = r \operatorname{sen} u$$

y entonces, podemos afirmar que existe $v \in [0, 2\pi]$ tal que

$$x = (a + r \cos u) \cos v \quad , \quad y = (a + r \cos u) \operatorname{sen} v \quad , \quad z = r \operatorname{sen} u$$

Obtenemos así una parametrización del toro $\boldsymbol{\phi} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\boldsymbol{\phi}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)$$

[8]dado que ambos miembros son positivos por ser $0 < r < a$