

Estimación puntual

A) Estimadores basados en los momentos.

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución

- * $Bi(1, \theta)$, $0 < \theta < 1$.
- * $\mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$.
- * $\mathcal{E}(\theta)$, $\theta > 0$.
- * $\mathcal{G}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

En cada uno de estos casos, encontrar:

- (a) Un estimador de θ basado únicamente en el primer momento.
- (b) Un estimador de θ basado únicamente en el segundo momento.

Verificar que los respectivos estimadores cumplan las restricciones impuestas sobre el parámetro. Mas precisamente, si $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ es el estimador resultante, verificar que $\delta_n(X_1, \dots, X_n) \in \bar{\Theta}$

2. El número de partículas que emite una fuente radiactiva por segundo, constituye un proceso de Poisson de intensidad λ .

Se recogieron durante 15 segundo los siguientes valores de emisiones:

500	488	426	510	450	368	508	514	426	476	512	526	444	524	236
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Estimar el valor del parámetro λ basado en la muestra.

3. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$.

- (a) Hallar un estimador de los momentos de $q(\theta) = P_\theta(X_1 \geq 1)$.
- (b) Deducir de (a) un estimador para θ .

4. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(0, \sigma^2)$, con $\sigma > 0$.

- (a) Encontrar un estimador de σ basado en el segundo momento.
- (b) Encontrar otro estimador de σ a partir de $E_\sigma(|X_1|)$.

5. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Hallar el estimador de los momentos de μ si

- (a) la densidad de X_1 está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\mu^4} x I_{[0, \mu^2]}(x) + \frac{1}{\mu^4} (2\mu^2 - x) I_{[\mu^2, 2\mu^2]}(x) \quad \mu > 0$$

- (b) la función de probabilidad de X_1 está dada por:

$$\begin{array}{c|ccc} k & 1 & 2 & 4 \\ \hline p(k) & \mu^2 & 2\mu(1-\mu) & (1-\mu)^2 \end{array} \quad 0 < \mu < 1$$

B) Estimadores de máxima verosimilitud.

1. Dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n para cada una de las distribuciones consideradas en el ejercicio A.1, encontrar los respectivos estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de θ .
2. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Consideremos el parámetro bivariado $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

- (a) Encontrar el EMV de θ .
- (b) Dado $\xi \in \mathbb{R}$, encontrar el EMV de $p = P_\theta(X_1 > \xi)$.
- (c) Dado $p \in (0, 1)$, encontrar el EMV del valor ξ tal que $P_\theta(X_1 > \xi) = p$.
- (d) Hallar el EMV de μ cuando σ^2 es conocido. ¿Es razonable que no dependa de σ^2 ?
- (e) Hallar el EMV de σ^2 cuando μ es conocido. ¿Es razonable que dependa de μ ?
- (f) Se supone que la distribución de un índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son parámetros desconocidos. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar de la población y se obtienen los siguientes datos:

1.53	1.65	1.72	1.83	1.62	1.75	1.72	1.68	1.65	1.61	1.70	1.60	1.52
1.81	1.72	1.50	1.51	1.65	1.58	1.82	1.65	1.72	1.65	1.73	1.61	

- i) Estimar μ y σ^2 por máxima verosimilitud basados en la muestra dada.
 - ii) Se considera que el índice es normal si es menor que 1.73. Estimar la proporción de la población con un índice anormal.
3. Si X_1, \dots, X_n es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}[0, \theta]$
 - (a) Hallar el EMV de θ .
 - (b) Hallar el estimador de los momentos de θ .

4. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

- (a) Encontrar el EMV de θ .
 - (b) Encontrar el estimador de los momentos de θ .
5. Si X_1, \dots, X_n es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$, mostrar que cualquier T tal que $X_{(n)} - 1/2 \leq T \leq X_{(1)} + 1/2$ es un EMV de θ .
 6. Sean X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ e Y_1, \dots, Y_m una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma^2)$, independientes entre sí.
 - (a) Hallar el EMV de $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$.
 - (b) Hallar el EMV de $\alpha = \mu_1 - \mu_2$.
 7. Se tienen observaciones independientes X_1, \dots, X_n de poblaciones normales con la misma media μ pero con varianzas $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ respectivamente.

- (a) ¿Es posible estimar todos los parámetros por máxima verosimilitud?
- (b) Suponiendo $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ conocidos, hallar el EMV de μ . Interpretar.

8. El número de microorganismos que se encuentran por grupo sobre una superficie sigue la siguiente distribución

$$p(x) = \theta I_{\{1\}}(x) + \frac{1 - \theta}{k - 1} I_{\{2,3,\dots,k\}}(x)$$

donde $0 < \theta < 1$. Supongamos que se examinan en forma independiente n grupos y se cuentan el número de microorganismos X_1, \dots, X_n en cada uno de ellos. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ .

C) Estimadores de mínimos cuadrados.

En todos los ejercicios de esta sección se supondrá que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ son v.a.i.i.d. con media cero.

1. Demostrar que la media muestral \bar{X} es el estimador de mínimos cuadrados (EMC) de θ en el modelo de posición: $X_i = \theta + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$.
2. Consideremos el modelo de regresión lineal simple: $X_i = \theta_1 t_i + \theta_2 + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, donde t_i son constantes conocidas. Hallar los EMC de θ_1 y θ_2 .
3. Sea el modelo $X_i = S_i(\theta) + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, $\theta \in \mathbb{R}^k$. Si $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, mostrar que el EMC y el EMV de θ coinciden.
Sugerencia: Notar que $X_i \sim N(S_i(\theta), \sigma^2)$.
4. Consideremos nuevamente el modelo $X_i = S_i(\theta) + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, $\theta \in \mathbb{R}^k$. Se define el estimador de *mínimos valores absolutos* (EMVA) como aquel valor $\hat{\theta}$ que minimiza

$$\sum_{i=1}^n |X_i - S_i(\theta)|$$

- (a) Mostrar que el EMVA coincide con el EMV si los ε_i tienen distribución doble exponencial, cuya densidad es

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

Sugerencia: Hallar la distribución de X_i para $1 \leq i \leq n$.

- (b) Mostrar que la mediana de X_1, \dots, X_n es el EMVA en el modelo de posición. *Sugerencia:* Considere primero el caso n impar.

D) Ejercicio para hacer con la computadora.

1. (a) Generar una muestra de tamaño $n = 100$ de una variable aleatoria $\varepsilon(\lambda)$ con $\lambda = 1$ y graficar su distribución empírica junto con la función de distribución acumulada.
(b) Para la muestra obtenida en la parte a), calcular el estimador de λ por máxima verosimilitud por el método de los momentos basado en el segundo momento.
(c) Proponer un estimador de la función de distribución acumulada distinto al obtenido en a) y graficarlo en el gráfico anterior. ¿Qué observa? Mejora su propuesta la estimación dada en a)?
(d) ¿Qué pasaría con las estimaciones anteriores si tendríamos otro tamaño de muestra? Repita los puntos anteriores con $n = 10$ y $n = 1000$.