7. Variables Aleatorias

Definir una *variable aleatoria* en un experimento aleatorio consiste en asociar un valor numérico a cada suceso elemental del experimento. Interesa fundamentalmente *asignar probabilidades* a dichos valores numéricos.

Formalmente, dados un experimento aleatorio ε, un espacio muestral Ω, una familia de sucesos en Ω con una probabilidad P, diremos que una función

$$X: \Omega \rightarrow R, \quad \text{es una variable aleatoria si}$$

$$X^{-1}(-\infty\ , x\ ] = \{\ \omega \in \ \Omega\ : X\ (\ \omega\ )\ \le\ x\ \}\ \text{es un suceso}$$

Esta definición asegura que sea posible realizar cálculos de probabilidades sobre sucesos definidos en R a partir de valores de las variables aleatorias. No utilizaremos esta definición en forma explícita en lo que sigue!

En ocasiones los **sucesos elementales** de un experimento aleatorio **son números**, en esta situación esos números coinciden con el valor de una variable aleatoria.

Ejemplo 1

ε = se arroja un dado y se observa el resultado de la tirada
Ω = {1,2,3,4,5 ,6}
Sucesos = cualquier subconjunto de Ω
X: $\Omega \rightarrow$ R la función identidad
Valores posibles de X = {1,2,3,4,5 ,6} = R_X

Para un dado que no está cargado asignamos equiprobabilidad a los valores posibles de la variable aleatoria X:

P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = 1/6

Ejemplo 2

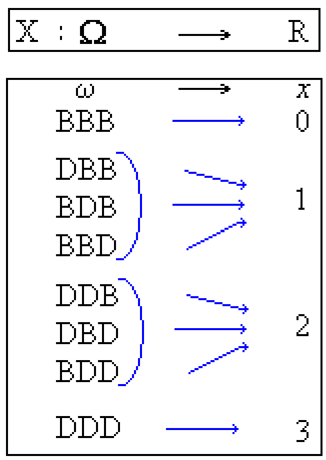
ε = se elige un individuo al azar de una población y se registra cuantos años completó de la escuela secundaria
Ω = {0,1,2,3,4,5 }
Sucesos = cualquier subconjunto de Ω
X: $\Omega \rightarrow$ R la función identidad
Valores posibles de X = {0, 1,2,3,4,5} = R_X

¿En qué casos es razonable asignar equiprobabilidad a los valores posibles de la variable aleatoria X?

Muchas veces los sucesos elementales de un experimento aleatorio son vectores, en esta situación podemos definir una o más variables aleatorias en dicho experimento y asignar probabilidades a sus valores.

Ejemplo 3

ε = se eligen al azar y con reposición 3 artículos de un lote que contiene 5% de artículos defectuosos.
Ω = {ω / ω Є (DDD, BDD, DBD, DDB, BBD, BDB, DBB, BBB)}
Sucesos = cualquier subconjunto de Ω
X: $\Omega \rightarrow$ R
X (ω) = cantidad de defectuosos en ω
Valores posibles de X = {0,1,2,3} = R_X



P(X=0) = P { $\omega \in \Omega$: X (ω) = 0 } = P(BBB)= $(0.95)^3$
P(X=1) = P { $\omega \in \Omega$: X (ω) = 1 } = P(BBD, BDB, DBB)= 3 $(0.95)^2$ $(0.05)^1$
P(X=2) = P { $\omega \in \Omega$: X (ω) = 2 } = P(BDD, DBD, DDB)= 3 $(0.95)^1$ $(0.05)^2$
P(X=3) = P { $\omega \in \Omega$: X (ω) = 3} = P(DDD)= $(0.05)^2$

¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo un defectuoso?

P (X ≤ 1) = P(X=0)+ P(X=1) = $(0.95)^3$+3 $(0.95)^2$ $(0.05)^1$

¿Cual es la probabilidad de a lo sumo 2 artículos defectuosos?

P (X ≤ 2) = 1- P (X=3) = 1- $(0.05)^2$

Veremos más adelante como asignar probabilidades en este tipo de variables aleatorias en general.

7.1 Variables Aleatorias Discretas

Si el conjunto de resultados posibles, R_X, es finito ó infinito numerable, decimos que X es una **v.a. discreta**.

Sea X una v.a. discreta. Indicaremos por $R_X=\{x_i, i \in \text{Naturales}\}$ al conjunto de todos sus valores posibles. Un modelo de probabilidad para X está dado por la asignación de probabilidades, p_i, a estos resultados,

$$P(X=x_i) = p_X(\mathbf{x_i}) = p_i \ .$$

Las probabilidades deben satisfacer

1. $0 \le p_i \le 1$
2. $\Sigma\ p_i = 1$

La probabilidad P(X esté en A) de cualquier suceso se calcula sumando las p_i de los resultados que componen A.

Los valores p_i determinan la *distribución de probabilidades* de la v.a. X mediante la función de *probabilidad puntual* (f.p.p. p_X) que asigna a cada x_i una probabilidad p_i.

Ejemplo 4: Un profesor califica sus pruebas en una escala de 4 puntos (1, 2, 3, 4). Supongamos que en un curso de 30 alumnos los resultados ordenados fueron:

1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4

Sea X = resultado de la prueba para un alumno del curso elegido al azar.

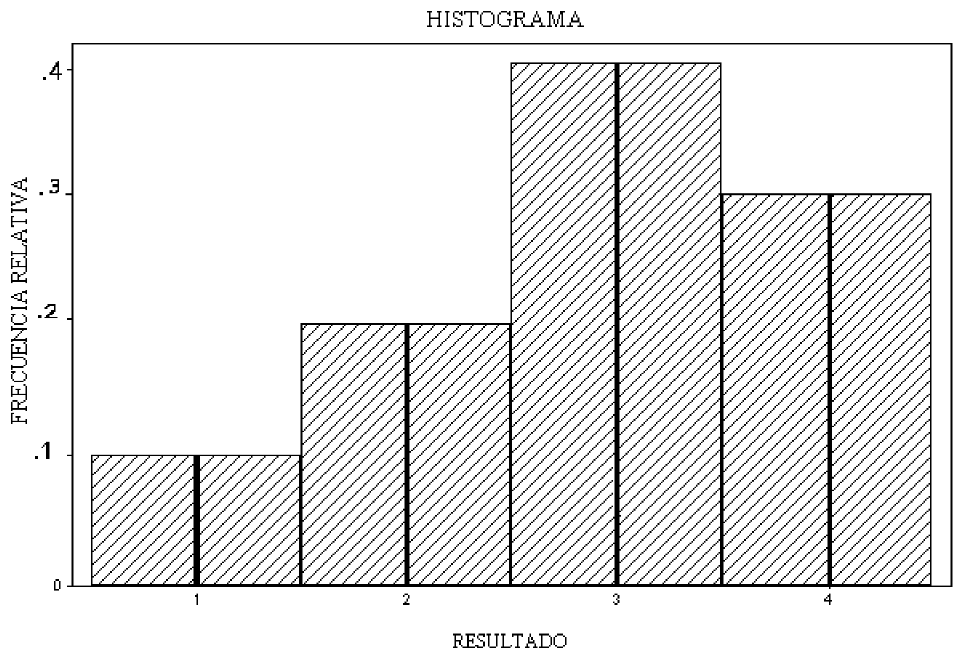
Luego $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$ X es **una variable aleatoria discreta**

La frecuencia de cada una de las calificaciones es, 3, 6, 12 y 9 respectivamente, pues 3 alumnos obtuvieron 1, 6 alumnos obtuvieron 2, 12 alumnos obtuvieron 3 y 9 alumnos obtuvieron 4.

resultado (x_i)	1	2	3	4
frecuencia (f_i)	3	6	12	9
frec. relativa (f_i/n)	.1	.2	.4	.3
$p_X(x_i) = p_i$	.1	.2	.4	.3

Es razonable asignar a cada valor posible de la v.a. X una probabilidad igual a la frecuencia relativa.

Diagrama de barras -- Histograma de Probabilidad



Siguiendo con el ejemplo 4:

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya tenido a lo sumo un 3?

$$P(X \leq 3) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)$$
$$= p1 + p_2 + p_3 = .1 + .2 + .4 = .7$$

Este valor (0.7) coincide con la proporción de alumnos que obtuvieron una calificación de a lo sumo 3.

Si pensamos que los 30 alumnos constituyen la población en estudio, podemos calcular la media, μ, y la varianza, σ^2, poblacionales de la variable, X (*resultado de la prueba)*.

$$\mu = \frac{1+1+1+2+2+2+2+2+2+2+2+......+4+4+4}{30}$$
$$= 1\frac{3}{30} + 2\frac{6}{30} + 3\frac{12}{30} + 4\frac{9}{30}$$
$$= 1\,p_X(1) + 2\,p_X(2) + 3\,p_X(3) + 4\,p_X(4)$$

La media poblacional μ_X de una variable X es un promedio pesado de los valores posibles.

En general tenemos:

Si X es una v.a. discreta con valores posibles $R_X = \{ x_i$, i en los Naturales} y f.p.p. $p_X(x_i)$ entonces se define la <u>Esperanza</u> de X (μ_X)

$$E(X)= \sum_{x_i \in R_X} x_i p_X(x_i)$$

Volviendo al ejemplo 4: La varianza poblacional σ^2 es

$$\sigma^2 = \frac{(1-\mu)^2 + (1-\mu)^2 + (1-\mu)^2 + ... + (4-\mu)^2}{30}$$
$$= (1-\mu)^2 \frac{3}{30} + (2-\mu)^2 \frac{6}{30} + (3-\mu)^2 \frac{12}{30} + (4-\mu)^2 \frac{9}{30}$$
$$= (1-\mu)^2 p_X(1) + (2-\mu)^2 p_X(2) + (3-\mu)^2 p_X(3) + (4-\mu)^2 p_X(4)$$

En general tenemos:

Si X es una v.a. discreta con valores posibles $R_X = \{ x_i$, i en los Naturales} y f.p.p. $p_X(x_i)$ entonces se define la <u>Varianza</u> de X (σ^2)

$$Var(X)= \sum_{x_i \in R_X} (x_i - \mu)^2 p_X(x_i)$$

7.2 Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria es continua cuando el conjunto de sus valores posibles son todos los valores de un intervalo o de una unión de intervalos de números reales.

Por ejemplo, la concentración de cromo en el Riachuelo es una variable aleatoria continua.

La distribución de una variable aleatoria continua se describe mediante la *función de densidad de probabilidad*, ó simplemente función de densidad f_X .

La función de densidad, f_X, de una variable aleatoria X satisface:

1. $f_X(x) \geq 0$

2. $\int f_X(x)\, dx = 1$

3. $P(X \in A) = \int_A f_X(x)\, dx$

Si X es una v.a. **continua** cualquiera. ¿Cuánto vale la probabilidad de que X = 160? ¿Por qué?

Ejemplo 5: La distribución alturas de las mujeres jóvenes argentinas es aproximadamente Normal con μ = 160 cm σ = 4 cm.

Sea X = altura de una mujer argentina joven, elegida al azar, X es una v.a. continua y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En general, si la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por la expresión anterior, decimos que X tiene distribución Normal de parámetros μ y σ^2 :

$X \sim N(\mu , \sigma^2)$

7,2,1 Propiedades de la distribución Normal

Sea $X \sim N(\mu , \sigma^2)$, entonces

a) $Z = (X - \mu) / \underline{\sigma} \sim N(0 , 1)$ distribución Normal Estándar.

b) $aX + b \sim N(a\mu + b , a^2\sigma^2)$

Siguiendo con el ejemplo 5: ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer joven elegida al azar tenga una altura entre 160 cm y 168 cm? Recordemos que
X = altura de una mujer argentina joven, elegida al azar entonces
$X \sim N(\mu , \sigma^2)$ con μ = 160 cm y σ = 4 cm

$P(160 < X < 168) = P(0 < (X - 160) / 4 < 2) = \Phi(2) - \Phi(0)$
$= 0.9772 - 0.5 = 0.4772$

7.2.2 Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua

¿Cómo se calculan la esperanza y la varianza de una variable aleatoria continua X conociendo su función de densidad de probabilidad f_X?

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad, f_X entonces su media o esperanza (E(X)) está dada por:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt$$

y su varianza

$$\sigma^2{}_X = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_X)^2 \; f_X(t)\, dt$$

Compare con el caso discreto.

En base a las propiedades de la esperanza es fácil ver que Var(X) = $E[(X- \mu)^2]$

7.2.2.1 Propiedades de la Esperanza y la Varianza

a) Esperanza de una función de una variable aleatoria: sea Y = h(X) entonces

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{i \geq 1} h(x_i)\, p_X(x_i) & \text{si X es discreta} \\ \int h(x)\; f_X(x)\, dx & \text{si X es continua} \end{cases}$$

b) Si P(X = c) = 1 entonces E(X) = c ($\Rightarrow$ E (c) = c)
c) E(aX + b) = aE(X) + b
d) Var (aX + b) = a^2 Var(X)
e) Var (c) = ...

7.3 Función de Distribución acumulada

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria X, cualquiera, es:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Si X es una variable aleatoria discreta

$$\mathrm{F}_X(\mathrm{x}) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \le x}} \mathrm{p}_X(x_i)$$

Si X es una variable aleatoria continua

$$\mathrm{F}_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f}_X(t)\, dt$$

Luego

$$\mathrm{F}'_X(x) = \mathrm{f}_X(x)$$

7.3.1 Propiedades de la función de distribución acumulada

(i) $0 \le F_X(x) \le 1 \;\forall\; x \in R$	**porque es una probabilidad**
(ii) Es monótona no decreciente	**porque es acumulada**
(iii) Es continua a derecha	**por la forma en que está definida**
(iv) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$	**por (i) (ii)**
(v) En cada punto *x* el valor del *salto* es la *probabilidad puntual* de ese punto: **salto** $= F_X(x) - F_X(x^-) = p_X(x)$	

Ejemplo 4 cont: Sea X = nota obtenida en una prueba de un alumno elegido al azar

nota (x)	1	2	3	4
$p_X(x)$	0.1	0.2	0.4	0.3

Función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 0.1 & si \quad 1 \le x < 2 \\ 0.3 & si \quad 2 \le x < 3 \\ 0.7 & si \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & si \quad 4 \le x \end{cases}$$